Ueber

die Correction der Thermometer,

insbesondere

über Bessel's Kalibrir-Methode.

Eine zur Erlangung

des

Doctorgrades

verfasste und mit Genehmigung Einer Hochverordneten

physico-mathematischen Facultät der Kaiserlichen Universität zu DORPAT

zur öffentlichen Vertheidigung bestimmte

ABHANDLUNG

von

Arthur von Oettingen.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

DORPAT.

Gedruckt bei E. J. Karow, Universitäts-Buchhändler.

1865.

Gedruckt mit Genehmigung der physico-mathematischen Facultät der Kaiserlichen Universität Dorpat.

Dorpat den 25. November 1865.

Dr. **Carl Schmidt,**
d. Z. Decan der physico-mathematischen Facultät.

(Nr. 44.)

D 32791

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

Erster Theil. Das Kalibriren der Thermometer nach der Besselschen Methode.

I. Theoretische Entwickelung und Berichtigung der Methode 5
II. Beispiel, entwickelt an einer willkührlich angenommenen Verbesserungskurve 10
III. Fortsetzung der theoretischen Entwickelung 20
IV. Beispiele zur Ergänzung der Methode 27
V. Kalibrirung eines Geisslerschen Normalthermometers 37
VI. Die Abtrennung der Quecksilberfäden 46

Zweiter Theil. Die Kalibrirmethoden von Gay-Lussac, Rudberg, Hällström und Egen.

I. Die Methode von Gay-Lussac 48
II. Rudberg's Methode 50
III. Hällström's Methode 51
IV. Egen's Methode 56

Dritter Theil. Die Bestimmung der festen Punkte und die Correction wegen der Ausdehnung des Glases.

I. Die Bestimmung des Gefrierpunktes 57
II. Die Bestimmung des Siedepunktes 64
III. Die Correction wegen der Ausdehnung des Glases 72

Einleitung.

Das Quecksilberthermometer gilt seit langer Zeit als ein wichtiges und für die Beantwortung der bedeutsamsten Fragen der Physik unentbehrliches Instrument. Es haben sich desshalb die grössten Forscher die Aufgabe gestellt, die Angaben desselben auf einen möglichst grossen Grad von Genauigkeit zu bringen. Schon die Bestimmung und Auswahl der für alle übrigen Temperaturen als Maass dienenden festen Punkte bot anfänglich viel Schwierigkeiten dar, und auch gegenwärtig kann diese Frage noch nicht vollkommen als erledigt betrachtet werden. Kaum minder ist das der Fall mit der Ermittelung des Röhrenkalibers. In der That erscheint dieses Problem als das ursprünglichere, ohne dessen Lösung keine thermometrische Arbeit begonnen, ja nicht einmal an die Untersuchung des Apparates selbst, soweit seine Angaben von physikalischen Bedingungen abhängen, geschritten werden kann.

Bei Gelegenheit einer thermoelektrischen Arbeit, die ich im Lauf des vergangenen Jahres unternahm bedurfte ich eines Thermometers, das zuverlässige Beobachtungen aller Temperaturen zwischen 0 und 100 Grad gestattete. Ich griff zur Besselschen Methode, um ein von Herrn Geissler in Berlin gearbeitetes Normalthermometer, das ich seit längerer Zeit besass, zunächst genau auf sein Kaliber zu untersuchen, weil nach einstimmigem Urtheil aller Physiker keine andere bisher vorgeschlagene Methode den Grad von Genauigkeit zu gewähren im Stande sei, wie jene. Dem widersprechen nicht einmal diejenigen Forscher, welche, weil sie Bessels Verfahren für „weitläufig" hielten, demselben ein anderes und einfacheres vorzogen. — Bessel [1]) hat die von ihm empfohlene Methode ohne theoretische Entwickelung an einem Zahlenbeispiele dargestellt. Genau dem beschriebenen Gange folgend, suchte ich das Kaliber meines Thermometers zu bestimmen, fand aber bald, dass die Verbesserungen, wie sie sich für die beobachteten oberen Enden der Quecksilberfäden ergaben, nicht mit denen der unteren Enden an identischen Skalenpunkten übereinstimmten. Der Grund zu solch einer Differenz der gefundenen Correktionsgrössen ging aus der angeführten Darstellung Bessels nicht hervor. Als ich ferner nach derselben Methode einzelne Theile der Thermometerröhre, — die obere und die untere Hälfte für sich — der Untersuchung unterwarf, und jetzt ganz andere, von denen für das ganze Thermometer berechneten weit abweichende Verbesserungen erhielt, so erkannte ich wohl, dass eine Anwendung der Methode ohne theoretische Entwickelung derselben nicht statthaft sei. Ich fand bei näherer Prüfung, dass die Rechnung sich bedeutend vereinfachen lasse, wenn man den theoretischen Ausdruck für irgend eine zu findende Verbesserung der Berechnung zu Grunde legt. Bessel hat es übersehen, dass mehr als die Hälfte aller Rechnungen, die er angiebt, erspart werden kann, wenn man sich gegenseitig aufhebende Zahlenoperationen vermeidet. Dieser Mangel seiner Darstellung aber erscheint von geringer Bedeutung gegenüber ander-

1) Ausführlich in Pogg. Ann. Bd. 6. p. 287. — Ferner in den Königsberger Astronomischen Beobachtungen. Siebente Abth. S. IX.

weitigen Lücken der Methode, durch welche, wenn sie nicht gekannt werden, man zu sehr fehlerhaften Resultaten gelangt, ja, zu solchen Irrthümern, dass die endgültigen Verbesserungen mehr von der Wahrheit abweichen, als die uncorrigirten Ablesungen selbst, denn der durch genaue Ausführung der Besselschen Vorschriften begangene Fehler kann grösser werden als die grösste durch die Rechnung gefundene Verbesserung.

Da es mir gelungen ist, mit Hülfe einer theoretischen Entwickelung den Fehler zu entdecken und den Werth der berichtigten Methode zu übersehen, da es sich ferner herausgestellt hat, dass dieselbe, so allgemein, wie keine andere, anwendbar ist, dabei verhältnissmässig wenig Zeit und Rechnung erfordert, und da endlich ein zuverlässiges Urtheil über die Genauigkeit des Resultates in jedem einzelnen Falle gewonnen werden kann, so erscheint eine eingehende Darlegung derselben geboten. — Wir werden erkennen, dass jener Fehler leicht zu vermeiden sei, und dass die für einzelne Theile der Thermometerskale gefundenen Verbesserungswerthe mit einander, zwar nicht identisch sein können, aber doch durch geeignete Reduktionen sich in Uebereinstimmung bringen lassen.

Man mag sich darüber wundern, dass all die genannten Umstände dem berühmten Königsberger Astronomen entgangen sind, und in der That kann ich nicht glauben, dass derselbe wirklich an zahlreichen Thermometern seine sinnreich erdachte Methode geprüft habe, da sonst die Lücken derselben ihm sicher nicht entgangen wären. Das von ihm am angeführten Orte mitgetheilte Zahlenbeispiel bezieht sich auf ein, — absichtlich so ausgewähltes, — dermassen unvollkommenes Thermometer, dass der durch die Methode begangene Fehler verdeckt werden musste. Hiezu kommt aber, dass eine gewisse Zahlengrösse, die Bessel meint, willkührlich annehmen zu dürfen — die Länge eines der Quecksilberfäden — so glücklich gegriffen ist, dass sie nahe übereinstimmt mit dem ihr wirklich zukommenden Werthe; dieser aber lässt sich streng genommen, nur sehr mühsam im vorliegenden Beispiel genau bestimmen, weil die Anordnung der Beobachtungen nicht ganz allen Anforderungen der Methode entspricht. Zwar entwirft Bessel schliesslich eine Tabelle über die aus seiner Rechnung resultirenden Beobachtungsfehler, deren Grösse nur in einem Falle ihm zu bedeutend erscheint; allein wir werden sehen, dass derselbe Fehler, der der ganzen Darstellung zu Grunde liegt, sich hier schliesslich der Art aufhebt, dass das Endresultat trügen muss [1]).

Ich darf voraussetzen nach Allem, was ich angeführt, dass in Wirklichkeit die Besselsche Methode niemals ernstlich angewandt worden ist, denn sonst wäre längst ein verwerfendes Urtheil über dieselbe laut geworden. Hoffentlich aber gelingt es mir, sie ihrer Mängel zu entkleiden und durch ihren hohen Werth zu empfehlen. Wenn ich behaupten darf, dass sie in den meisten Fällen einfach, und bequem auszuführen ist, so wird manchem Leser vielleicht die dem wenig entsprechende Länge der nachfolgenden Darstellung auffallen. Dagegen kann ich erwidern, dass die Untersuchung nur desshalb in der Ausführlichkeit und namentlich mit der Mannigfaltigkeit der Beispiele, wie ich sie mittheilen werde, ausgeführt wurde, damit dem Leser eine ähnliche Arbeit erspart bleibe, und derselbe doch Zutrauen zum Resultat gewinne, das in jedem einzelnen Falle, mit verhältnissmässig wenig Mühe gewonnen wird. Auf die Nothwendigkeit zahlreicher Beispiele komme ich später noch einmal zurück, und will hier nur noch einen kurzen Ueberblick über den Gang der nachfolgenden Abhandlung geben.

Mit einem Zahlenbeispiel, wie meist bei Problemen der vorliegenden Art geschieht, zu beginnen, schien mir um so weniger wünschenswerth, als Bessel a. a. O. schon ein solches

---

1) Auch darf ich nicht unerwähnt lassen, dass mehre Rechenfehler in dem dort angeführten Beispiel enthalten sind, denen zufolge 19 Werthe der Schlusstabelle der Verbesserungen auf Seite 301 sich anders ergeben. Auf Seite 297 ist ein Schreibfehler begangen und $\varphi\,(70) = -0{,}14$ statt $+0.14$ in Rechnung gebracht, ferner ergiebt sich der Werth von $\varphi\,(20)$ nicht wie dort steht $= -2{,}91$ sondern $= -2{,}824$. Indess beeinträchtigen diese Fehler nicht merklich das Endresultat, weil sie sich über die ganze Skale vertheilen, und bei der Bildung der arithmetischen Mittelwerthe nur ein geringer Bruchtheil ihres Werthes von Einfluss ist. — Auch die Schlusstabelle der Beobachtungsfehler scheint mir nicht genau berechnet zu sein.

giebt, und ich im Wesentlichen seinem Gange folgen werde. Eine allgemeine Fassung des Problemes schien mir zweckmässiger (I). Nachdem eine solche gefunden, wird ferner im ersten Theile ein dem theoretischen Endresultat entsprechend angeordnetes Zahlenbeispiel gegeben, welches aber nicht auf ein wirkliches Thermometer, sondern auf eine willkührlich fingirte Verbesserungskurve sich bezieht (II). Dadurch wird es möglich, das Endresultat streng zu controlliren, was sonst nicht thunlich wäre, da das wahre Kaliber einer gegebenen Röhre nicht bekannt ist.

An dieses Beispiel schliesst sich die Fortsetzung der theoretischen Entwickelung der Methode an (III). Dann folgen mehre Beispiele, welche mit den zugehörigen Rechnungen mitgetheilt werden sollen, da keinem Leser mehr als eine Controlle dieser unliebsamen Arbeit zugemuthet werden durfte (IV). Diese Beispiele sind so angeordnet, dass an einem jeden eine besondere auf die Anwendbarkeit der Methode sich beziehende Hauptfrage entschieden wird. Hierauf folgt die Kalibrirung eines wirklichen Thermometers und die Prüfung der Genauigkeit des Resultates (V). Als Schluss des ersten Theils werden endlich noch einige Andeutungen über das Verfahren bei Anstellung der Beobachtungen gegeben (VI). Nach einer eingehenden Darstellung der Besselschen Methode erschien ein Vergleich derselben mit allen übrigen bisher vorgeschlagenen von Nutzen. Diese werden daher im zweiten Theile und zwar insbesondere die Hällströmsche genauer, erörtert und letztere mit der Besselschen verglichen und combinirt.

Im dritten Theile der Arbeit soll in Kurzem die Bestimmung der festen Punkte vorgenommen, und namentlich die Genauigkeit geprüft werden, die bisherigen Forschungen gemäss beim Thermometer zwischen 0 und 100 Grad erreicht worden ist. Hieran endlich schliesst sich eine Darstellung derjenigen Correktionen an, die in Folge der verschiedenen Ausdehnuug des Quecksilbers und des Glases angebracht werden müssen.

Den 3ten Theil konnte ich nicht ausführlich behandeln, da jede einzelne hierher gehörende Frage einer ganzen Abhandlung werth wäre. Trotz der vielen über diesen Gegenstand erschienenen Arbeiten zeigt sich derselbe immer noch nicht erschöpft; er reizt vielmehr zu neuen Versuchen. Weil solche nur in geringer Zahl von mir mitgetheilt werden können, und meine Hauptaufgabe im ersten Theile erledigt ward, — so wollte ich hier den gegenwärtigen Stand dieser Fragen nur so weit kennzeichnen, als nöthig erschien, um Alles, was zur vollständigen Correction eines Thermometers gehört, zusammenzustellen.

Erster Theil.

Das Kalibriren der Thermometer nach der Besselschen Methode.

1. *Theoretische Entwickelung und Berichtigung der Methode.*

1. Es sei die zu untersuchende Thermometerröhre mit einer in annähernd gleiche Abstände getheilten Skale verbunden. Irgend einen Punkt der letzteren bezeichnen wir mit x, und seine Verbesserung mit φx, so dass zu gleichen Aenderungen des inneren Röhrenvolumens gleiche Aenderungen von $x + \varphi x$ gehören.

Jedem Punkte der Skale entspricht im Allgemeinen ein anderer Werth als der beobachtete. Ebenso auch dem Gefrier- und Siedepunkte des Wassers, e und s, deren Verbesserungen nach der obigen Bezeichnungsart φe und φs. Diese beiden corrigirten Beobachtungen bestimmen alsdann den wahren Gradwerth g eines ntheiligen Thermometers, so dass für den Skalenpunkt x

$$g = n \cdot \frac{x + \varphi x - (e + \varphi e)}{s + \varphi s - (e + \varphi e)}$$

Man trenne einen Faden von einer gewissen Länge ab, bringe das untere Ende desselben successive auf die unteren Hauptpunkte der Thermometerskale, indem man von 10 zu 10, oder 5 zu 5 Grad, fortgeht, und schreibe jedesmal den Ort des oberen Endes an. Dann verkürze man diesen Faden um ein gewisses Stück, verfahre wie mit dem ersten, und nehme so fort immer kürzere Fäden, setze dieselben an dieselben unteren Hauptpunkte an und beobachte je die Skalenpunkte der oberen Fadenenden.

Nennen wir die unteren Hauptpunkte der Skale A, B, C.... N, und bezeichnen die Fäden und später auch die Fadenlängen mit I, II, III..... (M—1), M; seien ferner die oberen Endpunkte des ersten Fadens $a_1, b_1, c_1 \ldots\ldots n_1$

die des zweiten „ $a_2, b_2, c_2 \ldots\ldots n_2$

$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

die des m^{ten} „ $a_m, b_m, c_m \ldots\ldots n_m$

so lassen sich sämmtliche Beobachtungen in eine Tabelle bringen:

Beobachtete obere Enden der Fäden.

Bezeichnung der Fäden:	I.	II.	III.	IV.	M—1	M.
Untere Enden:						
A	a_1	a_2	a_3	.....	a_{m-1}	a_m
B	b_1	b_2	b_3	.....	b_{m-1}	c_m
C	c_1	c_2	c_3	.....	c_{m-1}	c_m
⋮	⋮	⋮	⋮	.....	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	.....	⋮	
N—1	$n-1_1$	$n-1_2$	$n-1_3$	.....	$n-1_{m-1}$	$n-1_m$
N	n_1	n_2	n_3	.....	n_{m-1}	n_m

Die den unteren Enden der Fäden zukommenden Fehler oder Verbesserungen nennen wir φA, $\varphi B \ldots . \varphi N$, und analog die den beobachteten oberen Endpunkten der Fäden entsprechenden Fehler φa_1, $\varphi a_2 \ldots . \varphi a_m$, φb_1, $\varphi b_2 \ldots . \varphi b_m, \ldots . , \varphi n_1$, $\varphi n_2 \ldots . \varphi n_m$. Diese zu bestimmen ist die Aufgabe.

Es sei I der längste, und M der kürzeste Faden, und denken wir uns die Beobachtungen so eingerichtet, dass der Werth von a_m kleiner als N, so dass das obere Ende des kürzesten Fadens nicht so weit hinauf reicht, als der letzte Hauptpunkt N der unteren Fadenenden.

Führen wir ferner folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_m &= m \,.\, H_a \\ b_1 + b_2 + \ldots + b_m &= m \,.\, H_b \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad &\quad\quad \vdots \\ n_1 + n_2 + \ldots + n_m &= m \,.\, H_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + \ldots + n_1 &= n \,.\, V_1 \\ a_2 + b_2 + \ldots + n_2 &= n \,.\, V_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad &\quad\quad \vdots \\ a_m + b_m + \ldots + n_m &= n \,.\, V_m \end{aligned}$$

ferner $\dfrac{H_a + H_b + \ldots . + H_n}{n} = \dfrac{V_1 + V_2 + \ldots . + V_m}{m} = M_b$

so dass die H und V die arithmetischen Mittel aller Beobachtungen je einer Horizontal- und resp. Vertikalreihe, endlich M_b das Mittel aus allen Beobachtungen bedeutet.

Nennen wir ferner die arithmetischen Mittel aller Fehler der einzelnen Horizontalreihen Φ_a, $\Phi_b \ldots \Phi_n$ und die arithmetischen Mittel aus den Fehlern der folgweisen Vertikalreihen Φ_1, $\Phi_2, \ldots \Phi_m$, endlich den mittleren Fehler sämmtlicher Beobachtungen $M\varphi$.

2. Wenn alle Fäden nach ein und demselben, aber bisher noch nicht bestimmten Maassstabe gemessen, die Länge I, II . . . . . M haben, so besteht offenbar folgende Reihe von Gleichungen, in welchen die Fäden successive an ein und denselben unteren Endpunkt A angesetzt gedacht werden:

$$\begin{aligned} a_1 + \varphi a_1 - I &= A + \varphi A \\ a_2 + \varphi a_2 - II &= A + \varphi A \\ \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad &\quad\quad \vdots \\ a_m + \varphi a_m - M &= A + \varphi A \end{aligned} \qquad (1.)$$

denn $A + \varphi A$ ist der corrigirte, d. h. wahre untere Endpunkt der Fäden, welche bis an die wahren Skalenpunkte $a_1 + \varphi a_1$ u. s. w. hinanreichten.

Nennen wir das arithmetische Mittel aller Fäden $\dfrac{I + II + \ldots . + M}{m} = F$, so folgt aus der Gleichung (1) durch Summation:

$$A + \varphi A = H_a + \Phi_a - F \qquad (1a)$$

Ebenso ist ferner:

$$\begin{aligned} b_1 + \varphi b_1 - I &= B + \varphi B \\ b_2 + \varphi b_2 - II &= B + \varphi B \\ \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad &\quad\quad \vdots \\ b_m + \varphi b_m - M &= B + \varphi B \end{aligned} \qquad (2.)$$

$$B + \varphi B = H_b + \Phi_b - F. \qquad (2a.)$$

In ähnlicher Weise lassen sich N Gleichungen herleiten, die wir zusammenstellen:

$$\begin{aligned} A + \varphi A &= H_a + \Phi_a - F \\ B + \varphi B &= H_b + \Phi_b - F \\ \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad &\quad\quad \vdots \\ N + \varphi N &= H_n + \Phi_n = F. \end{aligned} \qquad (3.)$$

Nach den Gleichungen (1) und (3), ist aber

$$A + \varphi A + I = H_a + \Phi_a - F + I = a_1 + \varphi a_1$$

und ähnliche Gleichungen ergiebt die erste der Gleichungen (2) und die 2. der Gleichungen (3) u. s. f., folglich ist

$$\begin{aligned} \varphi a_1 &= H_a + \Phi_a - F + I - a_1 \\ \varphi b_1 &= H_b + \Phi_b - F + I - b_1 \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \varphi n_1 &= H_n + \Phi_n - F + I - n_1 \end{aligned} \qquad (4.)$$

Analog wird, wenn wir in den Gleichungen (1) und (2) je die 2. berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \varphi a_2 &= H_a + \Phi_a - F + II - a_2 \\ \varphi b_2 &= H_b + \Phi_b - F + II - b_2 \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \varphi n_2 &= H_n + \Phi_n - F + II - n_2 \end{aligned}$$

und endlich:

$$\begin{aligned} &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \varphi a_m &= H_a + \Phi_a - F + M - a_m \\ \varphi b_m &= H_b + \Phi_b - F + M - b_m \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \varphi n_m &= H_n + \Phi_n - F + M - n_m \end{aligned} \qquad (4.)$$

Jede der hier zusammengestellten Reihen giebt eine der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= M_b + M\varphi - F + I - V_1 \\ \Phi_2 &= M_b + M\varphi - F + II - V_2 \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \Phi_m &= M_b + M\varphi - F + M - V_m \end{aligned} \qquad (5.)$$

Wählen wir aus den hier vorkommenden Fäden den ersten als Maass der übrigen, so kommt, wenn die erste der vorstehenden Gleichungen von allen übrigen abgezogen wird,

$$\begin{aligned} II &= V_2 - V_1 + \Phi_2 - \Phi_1 + I \\ III &= V_3 - V_1 + \Phi_3 - \Phi_1 + I \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ M &= V_m - V_1 + \Phi_m - \Phi_1 + I \end{aligned}$$

Der Sinn dieser Gleichungen ist unmittelbar leicht zu fassen: Der Unterschied zweier Fadenlängen ist gleich dem Unterschiede der arithmetischen Mittel aus allen wahren Endpunkten des ersten und denen des anderen Fadens.

Setzen wir die Werthe von II, III .... M in die Gleichungen (4) ein, so kommt:

$$\begin{aligned} \varphi a_1 &= H_a + \Phi_a - F - a_1 + I \\ \varphi b_1 &= H_b + \Phi_b - F - b_1 + I \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \varphi n_1 &= H_n + \Phi_n - F - n_1 + I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi a_2 &= H_a + \Phi_a - F - a_2 + I + V_2 - V_1 + \Phi_2 - \Phi_1 \\ \varphi b_2 &= H_b + \Phi_b - F - b_2 + I + V_2 - V_1 + \Phi_2 - \Phi_1 \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \varphi n_2 &= H_n + \Phi_n - F - n_2 + I + V_2 - V_1 + \Phi_2 - \Phi_1 \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \varphi a_m &= H_a + \Phi_a - F - a_m + I + V_m - V_1 + \Phi_m - \Phi_1 \\ \varphi b_m &= H_b + \Phi_b - F - b_m + I + V_m - V_1 + \Phi_m - \Phi_1 \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \varphi n_m &= H_n + \Phi_n - F - n_m + I + V_m - V_1 + \Phi_m - \Phi_1 \end{aligned} \qquad (6.)$$

oder, wenn wir in diese Gleichungen statt der I die Grössen M_b und $M\varphi$ einführen, indem nach der ersten der Gleichungen (5) : $F - I + V_1 + \Phi_1 = M_b + M\varphi$ ist, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\varphi a_1 &= H_a + V_1 - M_b - a_1 + \Phi_a + \Phi_1 - M\varphi \\
\varphi b_1 &= H_b + V_1 - M_b - b_1 + \Phi_b + \Phi_1 - M\varphi \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
\varphi n_1 &= H_n + V_1 - M_b - n_1 + \Phi_b + \Phi_1 - M\varphi \\
\hline
\varphi a_2 &= H_a + V_2 - M_b - a_2 + \Phi_a + \Phi_2 - M\varphi \\
\varphi b_2 &= H_b + V_2 - M_b - b_2 + \Phi_b + \Phi_2 - M\varphi \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
\varphi n_2 &= H_n + V_2 - M_b - n_2 + \Phi_n + \Phi_2 - M\varphi \\
\hline
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
\varphi a_m &= H_a + V_m - M_b - a_m + \Phi_a + \Phi_m - M\varphi \\
\varphi b_m &= H_b + V_m - M_b - b_m + \Phi_b + \Phi_m - M\varphi \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
\varphi n_m &= H_n + V_m - M_b - n_m + \Phi_n + \Phi_m - M\varphi \\
\hline
\end{aligned}
\qquad (7.)
$$

3. Die Verbesserungen der unteren Endpunkte der Fäden werden folgende Gestalt erhalten, wenn wir in den Gleichungen (1a) und (2a) u. s. w. den Werth von F aus der ersten der Gleichungen (5) substituiren:

$$
\begin{aligned}
\varphi A &= H_a + V_1 - M_b - A + \Phi_a + \Phi_1 - M\varphi - I \\
\varphi B &= H_b + V_1 - M_b - B + \Phi_b + \Phi_1 - M\varphi - I \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
\varphi N &= H_n + V_1 - M_b - N + \Phi_n + \Phi_1 - M\varphi - I.
\end{aligned}
\qquad (8.)
$$

Der Unterschied in der Form der Gleichungen (7) und (8) besteht darin, dass den letzteren noch der Werth des ersten Fadens I anklebt. — Wenn, wie Bessel gemeint hat, der Maassstab, nach welchem die Fäden bestimmt werden, ein willkührlicher wäre, so könnte die Grösse I unmittelbar in den Gleichungen (8) als Zahl in Rechnung gebracht werden. In den Annahmen, die wir sogleich angeben werden, mittelst welcher eine erste Annäherung der Fehlergrössen gewonnen wird, ist aber schon ein absoluter Maassstab enthalten, nach welchem alle Fadenlängen bestimmt werden müssen.

4. Wenn in den Gleichungen (7) die mittleren Fehler aller Horizontal- und Vertikalreihen bekannt wären, so fehlte kein Glied mehr zur Bestimmung der einzelnen Fehler $\varphi a, \varphi b_1, \ldots, \varphi a_2, ., \varphi n_m$, denn alle die übrigen Grössen folgen aus den beobachteten Werthen der oberen Fadenenden durch blosse Rechnung. Jene sind aber nicht bekannt, und es handelt sich nun darum, wie man durch Annäherung aus den Gleichungen (7) die einzelnen Fehler bestimmt. —

Bessel setzt die Grössen $\Phi_a, \Phi_b, \ldots . \Phi_n, \Phi_1, \Phi_2 \ldots, \Phi_m$ sämmtlich $= o$, und begründet dieses Verfahren folgendermassen:

Er nimmt an, dass 1) „das arithmetische Mittel aus den Werthen von φx für viele verschiedene Punkte in einer Hälfte der Skale näherungsweise eine beständige Grösse sei." Und weiter setzt er hinzu: 2) „Diese Grösse kann man auch $= o$ annehmen, indem es nicht auf die absolute Grösse, sondern nur auf die Unterschiede der Verbesserungen φx ankömmt." Endlich heisst es 3) „Diese Rechnungsart führt durch successive Annäherungen zum Ziele, desto schneller, je mehr sich die Voraussetzung der Wahrheit nähert und je grösser die Anzahl der beobachteten Fäden ist."

Zunächst ist es schwer einzusehen, weshalb auch nur angenähert eine solche Beziehung zwischen den Fehlern, wie sie hier angedeutet ist, statt haben sollte, denn aus derselben folgt auch, dass $M\varphi = o$ sei. — Denken wir uns die Thermometerskale als Abscissenaxe, und die Fehler als Ordinaten einer Curve, warum sollte letztere nicht jede beliebige Ge-

stalt annehmen können, z. B. die einer Sinuslinie. Wie sollen die Fehlermittel der Strecke ac s. Fig. 1 Taf. IV gleichwerthig gedacht werden können denen der Strecke cd, und jede von beiden ebensogross wie die aller Fehler von $ac + bd$? —

Unsere Aufgabe wird hier sein darzuthun, dass in der That eine rationelle Begründung für die Besselsche Annahme sich angeben lässt. Es wird sich aber zeigen, dass in Folge derselben der Maassstab, nach welchem die Fehler und Fadenlängen bestimmt werden, nicht mehr willkührlich ist. Es darf desshalb auch die Fadenlänge I nicht geschätzt werden, sondern wir müssen ein anderes Mittel suchen, um dieselbe zu ermitteln, und dadurch eine Bestimmung der unteren Skalenfehler zu gewinnen. — Es wird bald einleuchten, dass die Voraussetzung, die Bessel über die Beständigkeit der mittleren Fehler macht, garnicht nöthig, also keine Bedingung ist für das Gelingen der Untersuchung.

Die Gleichungen (7) scheinbar m.n an der Zahl, gelten nur für $(m-1).(n-1)$ Gleichungen, denn wie man sich leicht überzeugt, ist in jeder Abtheilung die letzte Gleichung eine Folge aller übrigen vorstehenden, ferner die erste Gleichung der letzten Abtheilung (also die für φa_m) eine Folge aller ersten Gleichungen der früheren Abtheilungen (d. h. der Gleichungen für $\varphi a_1, \varphi a_2 \ldots . \varphi a_{m-1}$), ebenso die zweite der letzten Abtheilung eine Folge aller 2^{ten} Gleichungen der früheren, u. s. f. — Bei m.n Unbekannten haben wir also $mn - m - n + 1$ Gleichungen.

Fügen wir jetzt noch die Gleichungen der Besselschen Annahme hinzu

$$\begin{array}{cc} \Phi_a = o & \Phi_1 = o \\ \Phi_b = o & \Phi_2 = o \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \Phi_n = o & \Phi_m = o \end{array}$$

so sind dieses $m + n - 1$ Gleichungen, denn die Gleichung $M\varphi = o$ ist eine Folge sowohl der einen, als der andern Reihe, — und zur Bestimmung der m.n Unbekannten liegen uns jetzt ebenso viel Gleichungen vor.

5. Ehe wir dazu übergehen, die Berechtigung zu dieser Annahme und die Bedeutung derselben auseinanderzusetzen, dürfte es zweckdienlich sein, dieselbe vorläufig gelten zu lassen, und auf Grund der entwickelten Gleichungen ein Beispiel vorzunehmen, an welchem das Verfahren zur Auffindung der Verbesserungen ausführlich erläutert wird. — Vorerst will ich nur noch die Bemerkung vorausschicken, dass Bessel in seiner Abhandlung alle Rechnungen mit jeder einzelnen Beobachtung gerade so vornimmt, wie dieselben in der vorangegangenen Entwickelung von Gleichung (1) an bis Gleichung (7) gedacht worden sind. Auch für die Grössen I, II, III .... M nimmt er Zahlenwerthe an, die aber, wie wir aus den Gleichungen (7) ersehen, sämmtlich wieder verschwinden. Für denjenigen Leser, dem seine Darstellung geläufig ist, erwähne ich, dass die dort mit $f_{(2)}, f_{(3)} \ldots . f_{(m)}$ bezeichneten Fadenfehler ganz identisch sind mit den Fäden II, III, .. M selbst. In der That kann man sich auch nach Bessel's eigener Darstellung ein grosses Theil Rechnung dadurch ersparen, dass man, nicht die Fadenlängen schätzt und mit einem Fehlergliede behaftet, in Rechnung bringt, sondern die Längen sogleich von Anfang an $= o$ setzt, und nur die Fehler $f_{(2)}$ bis $f_{(m)}$ einführt. Die verbesserten Fadenlängen werden schliesslich doch dieselben Werthe erhalten. Indess treten weder die geschätzten noch die verbesserten Fadenlängen wirklich in Rechnung, denn die theoretische Entwickelung, die vollkommen der von Bessel angegebenen Methode entpricht, giebt nach der gemachten Voraussetzung für eine Beobachtung k_r die Verbesserung

$$\varphi k_r = V_k + H_r - M_b - k_r,$$

und dieser Ausdruck ist von keinem der Werthe I bis M abhängig.

Um an einem Beispiel die Rechnung durchzuführen, halten wir uns an den vorstehenden Ausdruck, ermitteln sämmtliche V_k und H_r, und erhalten durch alle möglichen Combinationen derselben die erste Annäherung der Verbesserungen φk_r.

Die Beobachtungen wollen wir aber noch nicht an einem wirklichen Thermometer ausführen, sondern zunächst ein anderes Verfahren einschlagen, welches zugleich eine Controlle des Resultats gestattet.

II. Beispiel, entwickelt an einer willkührlich angenommenen Verbesserungskurve.

1. Wir wollen annehmen, ein zu untersuchendes Thermometer erheische, damit seine Ablesungen auf gleich grosse Volumengrade, nach irgend einem willkührlichen Maassstabe gemessen, zurückgeführt werden, einer Verbesserungskurve, wie eine solche, ganz willkührlich angenommen, auf Taf. I Fig. I verzeichnet ist.

Denken wir nun Quecksilberfäden von constanter Temperatur, also sich stets gleichbleibendem Volumeninhalt, von den unteren Hauptpunkten der Skale auslaufend, und nehmen eine gewisse Länge für diese Fäden an, so können wir bestimmen, bis zu welchem Punkte der Skale ein jeder Faden gereicht haben würde, denn die Differenz des verbesserten oberen und unteren Endes muss constant sein. Es sei beispielsweise in Fig. 2 Taf. IV AB die uncorrigirte Skale, hedkg die Correctionskurve. a und b seien zwei Punkte der Skale, und wir denken uns einen Faden, der die Länge von ab wahren Graden (d. h. nach dem obengedachten Maassstabe) einnehme, lassen diesen Faden aber vom uncorrigirten unteren Ende a auslaufen, so lässt es sich leicht bestimmen, bis zu welchem Punkte der uncorrigirten Skale der Faden reichen müsste. Statt b werden wir nämlich solch einen Punkt β für das obere Fadenende erhalten, dass

$$\beta b = \delta\gamma = \delta\beta - ac.$$

(Da die Verbesserungen eines Thermometers nur Bruchtheile der Skalengrade sind, so wird es zweckdienlich sein, die Ordinaten unserer Curve nach einem grösseren Maassstabe zu messen, wie auch hier geschehen ist, in der Annahme $\beta\delta = \delta\gamma$.) — Es ist jetzt die wahre Länge unseres beobachteten Fadens, der von a bis β reicht:

$$L = A\beta + \beta\delta - (Aa + ac) = a\beta + \beta\delta - ac$$
$$= a\beta + \delta\gamma = a\beta + \beta b = ab \text{ wahre Grade.}$$

Wenn derselbe Faden von ab wahren Graden an den Punkt i angesetzt würde, und il scheinbar $=$ ab, so würden wir für das obere Ende unseres Fadens einen Punkt l' erhalten, so dass $ll' = l'i'$, wenn $ki = k'i'$. Wir würden also jetzt einen Punkt beobachten, der über den uncorrigirten Ort der Skale hinausläge. Es versteht sich übrigens von selbst, dass das Zeichen der Verbesserungen ac und $\beta\delta$, und das der Strecke βb stets berücksichtigt werden muss. —

2. In der Fig, I Taf. I sei uns nun die Curve der Verbesserungen gegeben. In der Abscissenaxe sind von 5 zu 5° die Hauptpunkte des Thermometers notirt. Der Maassstab für die Verbesserungen sei ein 10mal grösserer als der der Abscissen, so dass beispielsweise bei 10° der Skale die für gleiche Volumina nothwendige Verbesserung $+$ 0,80 Grad sei; ferner bei 30° etwa — 0,86 Grad, bei 65° ungefähr die grösste erforderliche Verbesserung $= +$ 2,68 Grad. Jetzt nehmen wir 8 Fäden: I, II, ... VIII an, deren beliebig gewählte Längen in wahren Graden nach vorliegendem Maassstabe folgende sein sollen:

I = 55°
II = 50°
III = 44°
IV = 38°
V = 35°
VI = 30°
VII = 23°
VIII = 15°

Diese Fäden denken wir folgweise von den unteren Hauptpunkten des Thermometers auslaufend, und verzeichnen die oberen Enden in einer Tabelle, indem wir nach der vorhin erörterten Weise verfahren.

Es folge hier sogleich die Beobachtungstabelle nebst allen Rechnungen, die sich an dieselbe knüpfen; die letzteren zu erklären, soll dann zunächst unsere Aufgabe sein. —

A. Beobachtungen k_r nach Taf. I Fig. 1.

Untere Hauptpunkte der Skale.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	m. Hr	Hr
0	53.45	49.25	44.22	38.74	35.84	30.87	23.53	14.28	290.18	36.272
5	58.28	54.01	48.98	43.95	41.26	36.51	29.53	20.85	333.37	41.671
10	63.13	58.49	53.28	48.28	45.70	41.37	34.68	26.55	371.48	46.435
15	68.04	63.01	57.40	52.35	49.82	45.62	39.38	31.56	407.18	50.898
20	72.77	67.34	61.42	55.97	53.43	49.25	43.34	35.84	439.36	54.920
25	77.66	72.01	65.67	59.83	57.10	52.90	47.02	40.02	472.21	59.026
30	82.45	77.44	70.65	64.46	61.53	56.98	51.03	44.42	508.96	63.620
35	87.46	82.44	76.39	69.59	66.46	61.52	55.40	48.52	547.78	68.472
n. V_k	563.24	523.99	478.01	433.17	411.14	375.02	323.91	262.04	3370.52 = m. n. Mb	
V_k:	70.405	65.499	59.751	54.146	51.392	46.877	40.489	32.755	421.314 = 8. Mb **52.664** = Mb	

B. Tabelle der $H_r + V_k - M_b$.

$H_r - M_b$									Differenz je 2-er auf einanderfolgender Hr—Mb.	Verbesserungen der unteren Hauptpunkte.	
— 16.392	54.013	49.107	43.359	37.754	35.000	30.485	24.097	16.363	5° + 0.399	+ 2.200	Graphisch U — U.
— 10.993	59.412	54.506	48.758	43.153	40.399	35.884	29.496	21.762	5° — 0.236	+ 2.599	
— 6.229	64.176	59.270	53.522	47.917	45.163	40.648	34.260	26.526	5° — 0.537	+ 2.363	
— 1.766	68.639	63.733	57.985	52.380	49.626	45.111	38.723	30.989	5° — 0.978	+ 1 826	
+ 2.256	72.661	67.755	62.007	56.402	53.648	49.133	42.745	35.011	5° — 0.894	+ 0.848	
+ 6.362	76.767	71.861	66.113	60.508	57.754	53.239	46.851	39.117	5° — 0.306	— 0.046	
+ 10.956	81.361	76.455	70.707	65.102	62.348	57.833	51.445	43.711	5° — 0.148	— 0.452	
+ 15.808	86.213	81.307	75.559	69.954	67.200	62.685	56.297	48.563		— 0.600	

C. Erste Verbesserungen $\varphi(k_r) = H_r + V_k - M_b - k_r$ in $^1/_{1000}$ Graden, graphisch eingetragen auf Taf. I Fig. 2.

	+ 563	— 143	— 861	— 986	— 840	— 385	+ 567	+ 2.083
	+ 1.132	+ 496	— 222	— 797	— 861	— 626	— 34	+ 912
	+ 1.046	+ 780	+ 242	— 363	— 537	— 722	— 420	— 24
	+ 599	+ 723	+ 585	+ 30	— 194	— 509	— 657	— 571
	— 109	+ 415	+ 587	+ 432	+ 218	— 117	— 595	— 829
	— 893	— 149	+ 443	+ 678	+ 654	+ 339	— 169	— 903
	— 1.089	— 985	+ 57	+ 642	+ 818	+ 853	+ 415	— 709
	— 1.247	— 1.133	— 831	+ 364	+ 740	+ 1.165	+ 897	+ 43
Controlle	+ 3.340	+ 2.414	+ 1.914	+ 2.146	+ 2.430	+ 2.357	+ 1.879	+ 3.038
	— 3.338	— 2.410	— 1.914	— 2.146	— 2.432	— 2.359	— 1.875	— 3.036

Die Tabelle A enthält die Beobachtungen, die auf folgende Weise gewonnen wurden: Denken wir uns die 8 Fäden folgweise von den in der ersten Vertikalkolumne der Tab. A verzeichneten unteren Hauptpunkten der Skale ausgehend, so entsprechen sämmtliche Zahlen der nun folgenden Vertikalkolumnen den oberen Enden der Fäden. Setzt man also die fingirte Curve als Verbesserungscurve voraus, so muss jeder Faden mit Berücksichtigung der Verbesserungen seiner beiden Endpunkte die auf Seite (10) willkührlich und beliebig angenommene Länge haben. Wir bezeichneten mit Bessel den Fehler eines Skalenpunktes x mit φx, also muss beispielsweise

$$I = 55^0 = 53.45 + \varphi(53.45) - (0^0 + \varphi(0)) \text{ sein.}$$

In der That ist $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(53.45) = 1^0.55$, folglich $I = 55^0$. In der zweiten Horizontalreihe der Beobachtungen reichte derselbe Faden vom unteren Hauptpunkte 5^0 bis $58^0.28$

aber $\varphi(58^0.28) = + 2^0.38$

und $\varphi(5^0) = + 0.66$

also die wahre Länge $I = 58^0.28 + 2^0.38 - (5^0 + 0^0.66)$, welches wiederum richtig 55^0 giebt.

Beobachtungsfehler von einigen hundertstel Graden können wohl begangen werden, weil, namentlich an schnell steigenden Stellen, die Schätzung dieser Grössen schwierig wird. Um noch die negativen Verbesserungen zu berühren, sehen wir denselben Faden von 55° wahrer Länge vom unteren Hauptpunkt 30° bis 82°.45 reichen.

$$\text{Aber } \varphi(82^\circ.45) = +1.69$$
$$\text{und } \varphi(30^\circ) = -0.86$$

und $82^\circ, 45 + 1^\circ.69 - (30^\circ - 0^\circ.86) = 52^\circ, 45 + 2.55 = 55^\circ$.

Der Leser wird sich leicht vorstellen können, wie durch methodisch gedachte successive Annäherung man schnell den Punkt der Skale trifft, der der beobachtete Endpunkt sein muss. Dieser lässt sich allemal leicht nachher verificiren, wie solches im vorstehenden Beispiel geschehen ist. — Die Schätzungsfehler entsprechen ganz und gar den Beobachtungsfehlern, die am wirklichen Thermometer unvermeidlich und einer zwiefachen Begründung fähig sind. Die Ablesung der oberen und unteren Enden einerseits, und die durch geringe Temperaturschwankungen bedingte Volumveränderung der Fäden andererseits verursachen dieselben.

3. Für jeden der 8 Fäden sind also die oberen Enden verzeichnet, nachdem sie folgweise an die 8 unteren Hauptpunkte angesetzt worden.

Neben den Beobachtungen des letzten Fadens findet man unter der Rubrik $m . H_r$ die Summe aller Beobachtungen einer Horizontalreihe, dann weiter unter H_r die Zahlen der vorigen Reihe dividirt durch 8, — also das arithmetische Mittel der oberen Endpunkte aller Fäden, die von ein und demselben unteren Hauptpunkte ausgingen.

Ebenso sind unmittelbar unter jeder Vertikalreihe der Beobachtungen die Summen und sogleich darunter unter der Rubrik V_k die arithmetischen Mittel aller oberen Enden je eines und desselben Fadens verzeichnet.

Unter der Rubrik $m . H_r$ giebt die unterste Zahl die Summe sämmtlicher Beobachtungen der oberen Enden. Diese Zahl ist bloss zur Controlle für die Richtigkeit aller Additionen, die soeben ausgeführt sind, berechnet. Die Summe der Horizontalreihe $n . V_k$ und die der Vertikalreihe $m . H_r$ muss ein und dieselbe sein. Ebenso muss zur Controlle für die Richtigkeit der gewonnenen arithmetischen Mittel, die Summe 421,314 sich identisch für die Summe der H_r wie für die der V_k ergeben. Diese Controlle erspart ein doppeltes Rechnen. Das arithmetische Mittel aller H_r oder V_k giebt aber die mittlere Beobachtung, hier also $M_b = 52 . 664$; eine Grösse, die, wie aus der entwickelten Theorie hervorgeht, sofort in Rechnung tritt.

Wird nun der Werth von M_b von allen Zahlen unter H_r abgezogen, so entstehen die Zahlen, die in der ersten Rubrik der zweiten Gruppe von 8×8 Zahlen als Eingang der Tabelle verzeichnet sind unter der Ueberschrift $H_r - M_b$. Diese vertreten die Verbesserungen der unteren Enden; denn nach Gleichung (8) unserer Entwickelung sind die unteren Enden verbessert:

$$\begin{aligned} A + \varphi A &= H_a - M_b + V_1 - I \\ B + \varphi B &= H_b - M_b + V_1 - I \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ N + \varphi N &= H_n - M_b + V_1 - I \end{aligned}$$

Sie unterscheiden sich von den Zahlen jener Rubrik nur durch den Werth einer Constanten $V_1 - I$, die indess unbekannt ist, da I nicht willkührlich angenommen werden darf. — Wenn eine der Verbesserungen dieser unteren Hauptpunkte bekannt wird, so giebt die gedachte Columne unter $H_r - M_b$ (ebenso gut übrigens auch die Werthe der H_r) die Verbesserungen aller übrigen unteren Hauptpunkte.

Jetzt bilden wir die Tabelle der $V_k + H_r - M_b$, indem jede einzelne der unter $H_r - M_b$ stehenden Zahlen zu den einzelnen zu jedem Faden gehörigen V_k hinzuaddirt wird. Ich brauche kaum anzudeuten, dass diese Rechnung sehr vereinfacht wird dadurch, dass in den folgweisen Horizontalreihen nur ein und dieselbe Zahl hinzuaddirt zu werden braucht, so dass, wenn beispielsweise die erste Horizontalreihe niedergeschrieben ist, man die zweite erhält, indem man allen Zahlen der ersten Reihe die Grösse 5,399 zuzählt (d. i. die Differenz von

— 10.993 und — 16.392 unter $H_r - M_b$, oder einfacher noch die Differenz 41.671 — 36.272 unter H_r). Nicht überflüssig scheint es zu bemerken, dass auch jetzt am Schlusse dieser zweiten Tabelle eine einfache Controlle für die Rechnung dadurch geboten wird, dass man prüft, ob wirklich die letzte Zahl unter $H_r - M_b$ zu allen V_k addirt, die letzte Horizontalreihe liefert. Sobald die Controlle in einer Reihe nicht stimmt, so sind die Additionen bloss in dieser Vertikalreihe zu revidiren.

Endlich sieht man jetzt zu, um wie viel die Werthe dieser zweiten so eben gewonnenen Tabelle von den entsprechenden der ersten abweichen, und notirt die Differenzen je zweier in entsprechenden Stellen liegenden Zahlen in ähnlicher Weise in einer dritten Tabelle, die nun der entwickelten Methode gemäss die ersten Verbesserungen der gegebenen Beobachtungen enthält. — Die so eben dargethane Rechnungsoperation ist angedeutet in der Ueberschrift: Tabelle der Verbesserungen $= V_k + H_r - M_b - k_r$.

Die Summe der Fehler jeder Vertikalkolumne sowie jeder Horizontalreihe muss sich hier $= o$ zeigen, da allgemein angenommen ist, dass alle Φ_k und $\Phi_r = o$ sind. Desshalb ist unter der Tabelle der Verbesserungen erst die Summe der positiven, dann die der negativen Fehler notirt. Das Wort „Controlle" am Eingange dieser beiden Horizontalreihen deutet darauf hin, dass diese letzte Operation bloss ausgeführt wird, um sich davon zu überzeugen, dass bei der Bildung dieser dritten Tabelle kein Rechenfehler begangen, und sämmtliche Differenzen richtig gebildet worden sind. Der Unterschied der positiven und negativen Fehlersummen, der höchstens soviel Einheiten der letzten Stelle, als Horizontalreihen vorhanden sind, betragen kann, rührt davon her, dass bei der Auswerthung der arithmetischen Mittel eine Ungenauigkeit in den Tausendsteln (in unserem Falle bei der Division durch 8) entstehen kann. Bis auf die dritte Decimale sind die Rechnungen ausgeführt, bloss damit die zweite mit Sicherheit gewonnen werde.

Bis hierher ist das Resultat der Rechnung ganz dasselbe wie bei Bessel, nur ist durch Benutzung der entwickelten Formeln die Menge der Operationen bedeutend verringert; überflüssige Rechnungen, insbesondere die Addition willkührlich geschätzter Fadenlängen, und deren nachherige Subtraktion in anderer Gestalt, sind gänzlich vermieden.

4. Bessel empfiehlt nun weiter, die vorliegenden Fehler lexikographisch zu ordnen, je nach den Abscissen, zu denen sie gehören. Nahe zusammenliegende Abscissen oder Skalenpunkte werden zu einem arithmetischen Mittelwerthe vereinigt, und dann wird angenommen, dass das arithmetische Mittel der jenen Skalenpunkten zugehörigen Fehler jenem Mittelwerthe der Skale als Verbesserung zukäme. —

Zweierlei lässt sich gegen dieses Verfahren einwenden: Erstens raubt schon das Ordnen der Beobachtungen der ersten Tabelle sehr viel Zeit, und solche umständliche Operationen allein dürften bisher Viele gegen die ganze Methode eingenommen haben. Dann aber, selbst wenn wir von diesem mehr äusserlichen Momente absehen, riskirt man in der That weit von einander abstehende Correktionen in einen Mittelwerth zu vereinigen, der namentlich an solchen Stellen, wo die zu findende Curve Maxima oder Minima hat, weit abliegen dürfte von dem eigentlichen, diesem Skalenpunkte entsprechenden Fehler. —

Ich habe es desshalb vorgezogen, auf graphischem Wege solche Mittelwerthe aufzusuchen. Demgemäss werden die jedem einzelnen Faden angehörigen Verbesserungen der oberen Enden als Ordinaten der in der Tabelle der k_r angegebenen, entsprechenden Abscissen auf Taf. 1 in Fig. 2 graphisch aufgetragen, die nahezu von 5 zu 5 Grad von einander entfernten Ordinatenendpunkte aus freier Hand mit einander verbunden und dann die Mittel aller Ordinaten über ein und derselben Abscisse gesucht und bezeichnet. Allerdings begegnen wir auch hier zweierlei Uebelständen. Das Verfahren erscheint nämlich umständlich, insofern es ein liniirtes Papier irgend welcher Art erfordert. Wenn auch hier von diesem ganz und gar äusserlichen Umstande abgesehen werden darf [1]), so verhält es sich doch anders mit dem Verbinden

1) In den meisten Fällen genügt selbst ein aus freier Hand mit Hülfe des Lineals quadrirt gezogenes Papier.

der Ordinatenendpunkte aus freier Hand. Es bleibt hierbei ein grosses Theil Willkühr nach, und in der That würde man bei zwei nach einander angestellten Ausführungen wenigstens in den Hundertsteln, Differenzen für das zu suchende arithmetische Mittel wahrnehmen. Diesem Uebelstande wird aber gänzlich dadurch entgangen, dass, wie wir sehen werden, eine zweite Annäherung fast in allen Fällen unumgänglich nothwendig erscheint, und durch diese etwaige Fehler bei der Bildung jener Mittelkurve ausgeglichen werden.

Von andrer Seite erhellt aber der bedeutende mehrfache Vortheil: das Verfahren ist schnell und leicht ausführbar, dann bei weitem genauer als die ohnehin umständliche Rechnung, die Bessel statt dessen empfiehlt, endlich aber gewinnt man noch den Vortheil, besser zu übersehen, in wie weit die ersten Verbesserungen einander widersprechen, d. h. wie weit sie von einem Mittelwerthe abweichen, oder andererseits, in wie weit sie bei dieser ersten Annäherung schon mit einander übereinstimmen. Namentlich wird der continuirliche Verlauf aller zu einem Faden gehörenden Correktionen darauf hindeuten, dass die Veränderung des Kalibers eine allmählige, während ein Zu- und Abnehmen der Verbesserungen in verhältnissmässig nah bei einanderliegenden Skalenpunkten auf stärkere, auch plötzliche Veränderungen des Kalibers hinweist. Ein Beispiel dieser letzten Art wird später angeführt werden.

5. Sehen wir jetzt zu, welche Verbesserungen durch die einzelnen Fäden (Fig. 2. Taf. I) erhalten werden, so scheinen dieselben zunächst bedeutend von denen der ursprünglichen Curve (Fig. 1) abzuweichen, doch aber unter einander nicht sehr verschiedene Werthe an identischen Skalenpunkten zu besitzen; die grösste Differenz bei der Abscisse 61,4 beträgt etwa 0,6 Grad, denn der sechste Faden giebt die Correktion + 1.165, und der dritte Faden + 0,587; jener für die Abscisse 61°.52, dieser für 61°,42, wie aus der Rechnungstabelle ersichtlich ist. —

6. Für die Curve der arithmetischen Mittel in Fig. 2 sind ausser den 64 Verbesserungen der 8mal 8 oberen Fadenenden, noch die einmal 8 Correktionen der unteren Enden hinzugenommen. In der That haben diese Verbesserungen dasselbe Gewicht, wie die der oberen Enden, da nach den Gleichungen (8) derselbe Fehler in der Annahme $\Phi_a + \Phi_1 - M\varphi = o$ u. s. w. gemacht wird, wie für jeden Fehler, der durch die Gleichungen (7) gewonnen wird.

Hier aber tritt der wesentliche Unterschied gegen Bessel hervor. Die Grösse V_1 in Gleichung (8) sowie die Länge I tritt bei Bessel in Rechnung, denn V_1 ist das bekannte arithmetische Mittel aller oberen Enden des ersten Fadens und die Länge I ist dort willkührlich geschätzt und gleichfalls in Rechnung gebracht. Durch die letztere Schätzung ist ein grösserer oder geringerer Fehler in sämmtlichen Verbesserungen der unteren Hauptpunkte begangen, und je grösser die Abweichung von der bereits bestimmten aber noch unbekannten Länge des Fadens I ist, um so mehr wird die gesammte Correktionskurve verdorben. Bei dem Besselschen Beispiele ist zufällig die Grösse I ziemlich richtig geschätzt, obwohl durch den geringen Fehler die ganze Curve der Verbesserungen merklich afficirt wird.

Um nun die, wie oben erörtert, durch die Werthe von $H_r - M_b$, oder H_r, vertretenen Verbesserungen zu benutzen, nehmen wir die Verbesserung des unteren Hauptpunktes 35° so an, wie sie sich als Mittel der aus den oberen Fadenenden gewonnenen Correktionsgrössen ergiebt. Unter 35° der Abscisse findet man aber das Mittel = — 0,600. Um die Verbesserung der übrigen Hauptpunkte zu finden, notire man die Differenzen der Zahlen $H_r - M_b$, oder was dasselbe wäre, die Differenzen irgend welcher Zahlen einer Vertikalreihe der zweiten Tabelle (sub B), wie solches in obiger Rechnung neben der Tab. B geschehen ist. Die nebenstehenden „Verbesserungen der unteren Hauptpunkte" ergeben sich dann unmittelbar, indem man die von 5° abweichende Differenzgrösse von jeder unmittelbar vorhergehenden Verbesserung abzieht.

So ist beispielsweise

die Verbesserung von 35° =	— 0.600
hiervon ab die Abweichung =	— 0.148
die Verbesserung von 30° =	— 0.452
hiervon ab die Abweichung =	— 0.306

die Verbesserung von $25^0 = -0.046$
hiervon ab die Abweichung $= -0.894$
die Verbesserung von $20^0 = +0.848$
u. s. w. u. s. w.

Die auf diese Art gefundenen Verbesserungen sind mit der Bezeichnung U in die graphische Zeichnung der Fig. 2 aufgenommen. Von der Abscisse 35° an abwärts bis zur Abscisse 15° wirken die Werthe dieser Verbesserungen mit zur Bestimmung des arithmetischen Mittels.

Man könnte sich die Berücksichtigung der unteren Enden ganz bei der ersten ersparen und dieselben erst bei der zweiten Annäherung, die wir sogleich aufsuchen werden, ermitteln; aber es werden erstens wirklich in fördernder Art die Correktionen der Skale von 15 bis 35° dadurch berichtigt; dann aber ist es von Interesse zu sehen, um wie viel bei der zweiten Annäherung die alsdann gewonnenen Verbesserungen von denen der ersten abweichen.

Bei Bessel werden diese Verbesserungen der unteren Enden ganz unnöthigerweise bei der ersten Annäherung ausgewerthet. In seiner Darstellung werden nämlich die Fadenlängen bei der zweiten Annäherung an die unteren Enden angesetzt, nachdem diese soeben durch Subtraktion der Fadenlängen von den oberen Enden gefunden worden. Ueberhaupt werden nur die endgültigen Bestimmungen der Verbesserungen der unteren Enden wirklich berücksichtigt, und desshalb sind dieselben auch falsch und beeinträchtigen die Bestimmung der oberen Verbesserungen, die für sich zwar richtig gewonnen wurden, aber mit einem bedeutenden Aufwande unnöthiger Rechnung.

6. Gehen wir jetzt über zur zweiten Annäherung, bei welcher wir, im Gedanken der Methode, wiederum dem Vorgange Bessels folgen.

Wir stellen demgemäss die verbesserten Beobachtungen, nebst allen Rechnungen, die sich an dieselben anknüpfen, zusammen. Diese wollen wir alsdann erläutern und theoretisch rechtfertigen.

A'. Verbesserte Beobachtungen k'_r nach dem Mittel auf Taf. I Fig. 2.

Untere Hauptpunkte	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	$8.H'_r$	H'_r
0	53.82	49.16	43.55	37.96	35.17	30.46	23.96	16.26	290.34	36.292
5	59.09	56.46	48.86	43.26	40.42	35.79	29.23	21.67	332.78	41.598
10	63.93	59.30	53.61	48.08	45.15	40.55	34.08	26.59	371.29	46.411
15	68.45	63.82	58.17	52.57	49.78	45.08	38.58	31.11	407.56	50.945
20	72.55	67.82	62.27	56.65	53.79	49.16	42.61	35.16	440.01	55.001
25	76.72	71.92	66.29	60.67	57.86	53.19	46.63	39.21	472.49	59.061
30	81.34	76.52	70.75	65.18	62.38	57.73	51.10	43.76	508.76	63.595
35	86.22	81.33	75.55	69.82	67.01	62.37	56.02	48.35	546.67	68.334
$8.V'_k$	562.12	524.33	479.05	434.19	411.56	374.33	322.21	262.11	3369.90	
V'_k.	70.265	65.541	59.881	54.274	51.445	46.791	40.276	32.764	$421.237 = 8\,M_b$ $52.655 = M_b$	

$H'_r - M'_b$	B'. Tabelle der verbess. $H'_r + V_k' - M'_b$.								Differenzen der verbesserten unteren Hauptpunkte.	Verbesserungen der unteren Hauptpunkte
−16.363	53.902	49.178	43.518	37.911	35.082	30.428	23.913	16.401	$5^0 + 0.306$	$+2^0.278$
−11.057	56.208	54.484	48.824	43.217	40.388	35.734	29.219	21.707	$5^0 - 0.187$	$+2^0.584$
− 6.244	64.021	59.297	53.637	48.030	45.201	40.547	34.032	26.520	$5^0 - 0.466$	$+2^0.397$
− 1.710	68.555	63.831	58.171	52.564	49.735	45.081	38.566	31.054	$5^0 - 0.944$	$+1^0.931$
+ 2.346	72.611	67.887	62.227	56.620	53.791	49.137	42.622	35.110	$5^0 - 0.940$	$+0^0.987$
+ 6.406	76.671	71.947	66.287	60.680	57.851	53.197	46.682	39.170	$5^0 - 0.466$	$+0^0.047$
+10.940	81.205	76.481	70.821	65.214	62.385	57.731	51.216	43.704	$5^0 - 0.261$	$-0^0.419$
+15.679	85.944	81.220	75.560	69.953	67.124	62.470	55.955	48.443		$-0^0.680$

Graphisch ⊙ − ⊙ Fig. 2. Taf. I.

C'. Zweite Verbesserungen $= H'_r + V'_k - M'_b - k'_r$ in $^1/_{1000}$ Grad graphisch eingetragen auf Taf. I Fig. 3.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
	+ 82	+ 18	— 32	— 49	— 88	— 32	— 47	+ 141
	+ 118	+ 24	— 36	— 43	— 32	— 56	— 11	+ 37
	+ 91	— 3	+ 27	— 50	+ 51	— 3	— 48	— 70
	+ 105	+ 11	+ 1	— 6	— 45	+ 1	— 14	— 56
	+ 61	+ 67	— 43	— 30	+ 1	— 23	+ 12	— 50
	— 49	+ 27	— 3	+ 10	— 9	+ 7	+ 52	— 40
	— 135	— 41	+ 71	+ 34	+ 5	+ 1	+ 116	— 56
	— 276	— 110	+ 10	+ 133	+ 114	+ 100	— 65	+ 93
Controlle	+ 457	+ 147	+ 109	+ 177	+ 171	+ 109	+ 180	+ 271
	— 460	— 154	— 114	— 178	— 174	— 111	— 185	— 272

Unter der Ueberschrift „Verbesserte Beobachtungen k'_r nach dem Mittel auf Taf. I. Fig. 2" findet man die erste Beobachtungstabelle reproducirt, und zwar so, dass jedem auf Seite 11 Tab. A verzeichneten Werthe die graphisch gewonnene Verbesserung hinzugefügt ist. Auf diese Weise erhalten wir Beobachtungen an einem annähernd gebesserten Thermometer, und wenn die unteren Hauptpunkte mit ihren Correctionen an den Eingang gesetzt würden, so müssten die Differenzen der Zahlenwerthe der Tabelle und der corrigirten unteren Hauptpunkte lauter gleiche Werthe, und zwar die der Fadenlängen I bis VIII ergeben, wenn die Correctionen vollkommen genügen sollten. Indess findet diese Gleichheit keineswegs statt, obgleich die Abweichungen bedeutend geringer sind wie die, welche man nach der ersten Beobachtungstabelle erhielte. Desshalb nehmen wir diese verbesserten Beobachtungen als Ausgangspunkt einer neuen Rechnung ganz identisch mit der früheren an. So wenig wie dort, brauchen auch hier die Fadenlängen nicht berücksichtigt zu werden, da wir aus der Gleichung (7) ersehen, dass sie nicht das Resultat beeinflussen. Da wir jetzt von den verbesserten Beobachtungen ausgehen, und in der dritten Tabelle der vorstehenden Rechnung (C') die Werthe sub B' von denen sub A' abgezogen haben, so erhalten wir in C' die „zweiten Verbesserungen", d. h. Werthe, die denen der zuerst erhaltenen Mittelkurve hinzugefügt werden müssen, nachdem, wie in Fig. 3 Taf. I geschehen, das Mittel für die zweite Verbesserung gefunden worden. Diese zweiten Verbesserungen übersteigen den Werth eines $^1/_{10}$ Grades bloss an den beiden Enden der in den Beobachtungen vorkommenden Abscissen. Die Werthe der punktirten Mittelkurve Fig. 3 sind nachher in Fig. 2 denen der zuerst gewonnenen Mittelkurve hinzugefügt, und dadurch ist die punktirte Correctionskurve in Fig. 2 entstanden.

Die Verbesserungen der unteren Enden sind ganz dem früheren analog gewonnen; die leichte einfache Rechnung steht in den beiden letzten Vertikalkolumnen neben der Tab. B'. Die Verbesserungen für den unteren Hauptpunkt 35° ist aber jetzt $= -0°.680$ gesetzt, weil die neue punktirte Mittelkurve $^8/_{100}$ Grad unter der ersten Mittelkurve liegt, bei der Abscisse 35°; — die Correktionspunkte treten in der Zeichnung hervor durch das Zeichen ⊙.

Von 35° der Skale abwärts bis 0° ist jetzt erst die punktirte Mittelkurve genommen worden. Man überzeugt sich leicht davon, dass die Verbesserungen der unteren Hauptpunkte nicht bedeutend sich geändert haben. Der grösste Unterschied gegen jene ersten Correktionen beträgt $^{18}/_{100}$ Grad bei der Abscisse 20°.

8. Die zweite Annäherung erscheint nothwendig

1) hauptsächlich wegen der Correktionen der obersten Skalenpunkte, und um die durch die freigezogenen Handkurven herbeigeführten Fehler zu vermeiden,

2) um sich davon zu überzeugen, wie gross die zweiten Verbesserungen im Vergleich zu den ersten sind, wodurch man ein Urtheil darüber gewinnt, wie weit die jetzt erhaltene Correctionskurve zuverlässig ist.

Kehren wir noch einmal zu den Gleichungen (7) zurück, um nachträglich das bei der zweiten Rechnung eingeschlagene Verfahren zu erläutern.

Durch die verbesserten Beobachtungen ist jeder Zahl k_r der ersten Tabelle A eine Grösse $\varphi^0 k_r$, aus der arithmetischen Mittelkurve entnommen, hinzugefügt. Dadurch sind die Grössen Φ_k und Φ_r in zwei Theile getheilt, von denen der eine durch die gewonnene Correktionskurve bekannt und mit der entsprechenden Beobachtung in einen Ausdruck verbunden in der Tabelle A' verzeichnet ist, so dass hier die Beobachtung $k'_r = k_r + \varphi^0 k_r$.

Alle die Ausdrücke H_r, V_k, und M_b werden jetzt mit einem Theile der zugehörigen Φ_r, Φ_k und $M\varphi$ verbunden in den Gleichungen (7) gedacht und mit H'_r, V'_k und M'_b bezeichnet. — Die Gleichungen (7) können nämlich geschrieben werden

$$\varphi' k_r = H_r + \Phi^0_r + V_k + \Phi^0_k - (M_b + M^0\varphi) - k_r - \varphi^0 k_r + \Phi'_r + \Phi'_k - M'\varphi$$

und setzen wir analog dem Verfahren bei der zweiten Annäherung

$$\text{die neue Beobachtung} \quad k'_r = k_r + \varphi^0 k_r$$
$$\text{die neuen arithm. Mittel} \quad H'_r = H_r + \Phi^0_r$$
$$V'_k = V_k + \Phi^0_k$$
$$M'_b = M_b + M^0\varphi,$$

so lauten die Gleichungen (7) jetzt

$$\varphi' k_r = H'_r + V'_r - M'_b - k'_r + \Phi'_r + \Phi'_k - M'\varphi \quad (7')$$

und ganz wie früher suchen wir die Fehler $\varphi' k_r$ zu bestimmen, indem wir jetzt wiederum setzen

$$\Phi'_r = \Phi'_k = M'\varphi = 0.$$

9. Um zu sehen, ob die dritte Annäherung noch wesentliche Veränderungen herbeiführt, folge hier noch die Berechnung der zweimal verbesserten Beobachtungen. Ganz ähnlich wie früher treten jetzt die genaueren Werthe H''_r, V''_k und M''_b in Rechnung.

Berechnung der dritten Annäherung.

A''. Verbesserte Beobachtungen k''_r nach dem graphischen Mittel Fig. 2 Taf. I.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.		H''_r
0	53.84	49.16	43.51	37.92	35.11	30.44	23.93	16.42	290.33	36.291
5	59.09	54.49	48.86	43.23	40.42	35.75	29.20	21.70	332.74	41.592
10	63.95	59.32	53.68	48.09	45.15	40.53	34.02	26.53	371.27	46.409
15	68.52	63.83	58.19	52.62	49.78	45.07	38.56	31.08	407.65	50.956
20	72.57	67.87	62.29	56.57	53.85	49,16	42.59	35.12	440.02	55.002
25	76.70	71.91	66.34	60.69	57.87	53.23	46.65	39.19	472.58	59.072
30	81.23	76.49	70.81	65.21	62.40	57.75	51.13	43.73	508.75	63.594
35	85.94	81.22	75.57	69.91	67.07	62.38	56.05	48.36	546.50	68.312
	561.84	524.29	479.25	434.24	411.65	374.31	322.13	262.13	3369.84	
zweimal verbess.: V''_k.	70.230	65.536	59.906	54.280	51.456	46.789	40.266	32.766	421.228 **52.653** $= M_b''$	

$H''_r - M''_b$	B''. Tabelle der zweimal verbess. $H''_r + V_k'' - M''_b$.								Differenzen der verbesserten unteren Hauptpunkte.	Verbesserungen der unteren Hauptpunkte
— 16.362	53.868	49.174	43.544	37.918	35.094	30.427	23.904	16.404	5^0 + 0.301	+ 2.299
— 11.061	58.169	53.475	47.845	42.219	39.395	34.728	28.205	20.705	5^0 — 0.183	+ 2.600
— 6.244	63.986	59.292	53.662	48.036	45.212	40.545	34.022	26.522	5^0 — 0.453	+ 2.417
— 1.697	68.533	63.839	58.209	52.583	49.759	45.092	38.569	31.069	5^0 — 0.954	+ 1.964
+ 2.349	72.579	67.885	62.255	56.629	53.805	49.138	42.615	35.115	5^0 — 0.930	+ 1.010
+ 6.419	76.649	71.955	66.325	60.699	57.875	53.208	46.685	39.185	5^0 — 0.478	+ 0.080
+ 10.941	81.171	76.477	70.847	65.221	62.397	57.730	51.207	43.707	5^0 — 0.282	— 0.398
+ 15.659	85.889	81.195	75.565	69.939	67.115	62.448	55.925	48.425		— 0.680

C''. Tabelle der dritten Verbesserungen $\varphi''k_r = H''_r + V''_k - M''_b - k''_r$ in $^1/_{1000}$ Grad

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
	+ 28	+ 14	+34	— 2	— 16	— 13	— 26	— 16
	+ 79	— 15	— 15	— 11	— 25	— 22	+ 5	+ 5
	+ 36	— 28	— 18	— 54	+ 62	+ 15	+ 2	— 8
	+ 13	+ 9	+19	— 37	— 21	+ 22	+ 9	— 11
	+ 9	+ 15	— 35	+ 59	— 45	— 22	+ 25	— 5
	— 51	+ 45	— 15	+ 9	+ 5	— 22	+ 35	— 5
	— 59	— 13	+ 37	+ 11	— 3	— 20	+ 77	— 23
	— 51	— 25	— 5	+ 29	+ 45	+ 68	— 125	+ 65
Controlle	+165	+ 83	+ 90	+108	+112	+105	+153	+ 70
	— 161	— 81	— 88	— 104	— 110	— 99	— 151	— 68

10. Man könnte versuchen, die Werthe der Tab. C'' noch zu einem arithmetischen Mittel zu vereinigen, allein sämmtliche hier eintretende Correktionen fallen bereits in das Gebiet der Beobachtungsfehler, die bei Schätzung der Ordinaten der graphischen fingirten Curve (Fig. 1) unvermeidlich waren. — Bloss die letzte Beobachtung des VII. Fadens giebt eine Verbesserung — 0,125, gehörig zur Abscisse 55°.40 (wie aus der ersten Beobachtungstabelle zu ersehen), ein Werth der zu gross erscheint und wohl zu berücksichtigen wäre, wenn nicht andrerseits die meisten dieser Gegend der Skale zukommenden dritten Verbesserungen sehr klein, ja mehre sogar positiv wären; so namentlich die beiden ersten Correktionen des I. Fadens. Es war zu vermuthen, dass ein grösserer Beobachtungsfehler in Herstellung der Beobachtungstabelle A an dieser Stelle begangen worden. Durch diese Vermuthung veranlasst, wurde die bezügliche Beobachtung einer erneuerten Verifikation unterzogen, und es ergab sich in der That, dass für die letzte Zahl der VII Columne in A (Seite 11) statt 55.40 eigentlich 55.24 hätte genommen werden müssen, denn

$$\varphi\,(55^\circ.24) = +\,1^\circ.90$$

und

$$\varphi\,(35^\circ) = -\,0.86$$

$$\text{also } 55^\circ 24 + \varphi\,(55^\circ.24) - [35^\circ + \varphi\,(35^\circ)] = 57^\circ.14 - 34^\circ.14 = 23^\circ$$

und 23° sollte der siebente Faden lang sein. —

Ich habe es nicht für nöthig erachtet, die ganze Rechnung von neuem vorzunehmen, da dieser Fehler geeignet erscheint, darzuthun, wie ein grosser Beobachtungsfehler sich kund thut.

Die dem oberen Theil der Skale zukommenden Verbesserungen, die höchstens $^6/_{100}$ Grad betragen, sind in der graphischen Mittelkurve noch aufgenommen.

11. Augenscheinlich reicht die endgültige Correktionskurve bedeutend von der Ausgangskurve Fig. 1 ab, und wir wollen jetzt darthun, dass sie in der That jene erstere vollkommen ersetzt. —

Die gefundene Curve durchschneidet die Ausgangskurve unter der Abschisse 37°.50; zu beiden Seiten dieses Durchschnittspunktes werden die Differenzen der Ordinaten in entgegengesetztem Sinne immer grösser und grösser. —

Zunächst will ich zeigen, dass die genannte Differenz der Ordinaten fast genau proportional ist der Entfernung der verbesserten Skalenpunkte von der verbesserten Abscisse des Durchschnittspunktes. Dazu dient die nachfolgende Tabelle, in welcher die dritte Columne sub A die obengenannte Entfernung eines verbesserten Skalenpunktes von jenem Durchschnittspunkt giebt, die folgende Rubrik unter αA einmal die berechneten Werthe für $\alpha = 0{,}063$, dann nebenbei die beobachtete Differenz der Ordinaten der Mittelkurve Fig. 1 und 2. —

Vergleich der (fingirten) beobachteten Curve Fig. 1, mit der durch zweimalige Annäherung berechneten Fig. 2 auf Taf. 1.

uncorrigirte Abscisse = kr.	corrigirte Abscisse = kr + φkr	A = k + φkr − d (d = 36.71)	αA		Differenz in 1/100 Grad.
			berechnet.	beobachtet.	
87.5	89.20	52.49	3.306	3.27	— 4
85.0	86.74	50.03	3.152	3.07	— 8(!)
82.5	84.20	47.49	2.992	2.97	— 2
80.0	81.66	44.95	2.832	2.81	— 2
77.5	79.20	42.49	2.677	2.66	— 2
75.0	76.86	40.15	2.529	2.46	— 7(!)
72.5	74.79	38.08	2.399	2.41	+ 1
70.0	72.54	35.83	2.257	2.31	+ 5
67.5	70.15	33.44	2.107	2.13	+ 2
65.0	67 68	30.97	1.951	1.96	+ 1
62.5	65.15	28.44	1.792	1.81	+ 2
60.0	62.53	25.82	1.627	1.67	+ 4
57.5	59.80	23.09	1.455	1.51	+ 5
55.0	56.85	20.14	1.269	1.26	— 1
52.5	53.89	17.18	1.082	1.10	+ 2
50.0	50.90	14.19	0.894	0.92	+ 3
47.5	47.91	11.20	0.706	0.72	+ 1
45.0	44 94	8.23	0.518	0.57	+ 5
42.5	42.05	5.34	0.336	0.37	+ 3
40.0	39.34	2.63	0.166	0.17	0
37.5	36.71	0.00	0. 0	0. 0	0
35.0	34.14	— 2.57	0.162	0.18	+ 1
32.5	31.62	— 5.09	0.321	0.34	+ 2
30.0	29.14	— 7.57	0.477	0.50	+ 2
27.5	26.72	— 9.99	0.629	0.66	+ 3
25.0	24.36	— 12.35	0.778	0.79	+ 1
22.5	22.07	— 14.64	0.912	0.97	+ 6(!)
20.0	20.00	— 16.71	1.043	1.03	— 1
17.5	17.97	— 18.74	1.181	1.11	— 7(!)
15.0	15.67	— 21.04	1.326	1.33	0
12.5	13.27	— 23.44	1.477	1.48	0
10.0	10.80	— 25.91	1.632	1.62	— 1
7.5	8.27	— 28.44	1.792	1.78	— 1
5.0	5.67	— 31.04	1.956	1.93	— 3
2.5	2.97	— 33.74	2.123	2.02	— 10(!)
0.0	0.00	— 36.71	2.313	2.30	— 3

Die Differenzen der beiden Columnen unter αA betragen höchstens 1/10 Grad. In der Fig. 1 findet man durch Kreuze die durch Addition der berechneten Werthe sub αA gewonnenen Ordinaten-Endpunkte verzeichnet. Durch eine in angedeutetem Sinne vollzogene Drehung der gefundenen wird also die ursprüngliche Curve fast vollkommen wieder hergestellt. Die grössten Abweichungen sind durch das Zeichen: (!) in vorstehender Tabelle angedeutet. Sie lassen sich leicht durch das eingeschlagene Verfahren entschuldigen. Der Abscissenpunkt 85°.0 konnte nicht mit gleicher Genauigkeit, wie die übrigen Verbesserungen, gefunden werden, weil zu wenig Beobachtungen dieser Skalengegend vorlagen. Bei 75° tritt die sehr starke Biegung der Curve als Ursache einer schwierigen und desshalb ungenaueren Schätzung auf (bei der Abscisse 55° weichen trotz des oben besprochenen Beobachtungsfehlers die Curven nicht erheblich von einander ab, weil der Einfluss der letzten den 7 andern Beobachtungen gegenüber zu sehr geschwächt wird). Endlich bei den letzten Abweichungen ist es das Ziehen der Curve aus freier Hand, die eine gewisse Willkühr im Verfahren mitbrachte.

In der That dürfen wir uns vorstellen, dass an den genannten Stellen schon die Ausgangskurve anders gestaltet wäre, z. B. grade so, wie sie durch die Kreuze bestimmt wurde, und auf unserer Beobachtungstabelle könnte in Folge dessen keine einzige Zahl sich ändern, da die Ordinaten der Ausgangskurve für die Abscisse 2°.5; 17°.5; 22°5 nirgends in Betracht kommen. Die erste Beobachtung des siebenten Fadens fällt zwar in die Nähe des letztgenannten Skalenpunktes, aber hier ist die Neigung der Curve wiederum eine sehr bedeutende.

Kehren wir zur theoretischen Darstellung zurück, die, nach ausführlicher Erörterung eines Beispieles dem Leser leicht verständlich sein wird.

III. Fortsetzung der theoretischen Entwickelung.

1. Wir hatten gesehen, dass ein Grad bestimmt wird durch die Gleichung:

$$G = n\,\frac{(x+\varphi x)-(e+\varphi e)}{(s+\varphi s)-(e+\varphi e)}$$

Man übersieht nun bald, dass jedem Werth von φ 1) irgend ein constanter Werth b und 2) ein Stück $\alpha\,(x+\varphi x-d)$, proprotional dem wahren Skalenpunkt $x+\varphi x$, von einem beliebigen Anfangspunkt d an gerechnet, hinzugefügt werden kann, ohne dass der Gradwerth von G sich ändert. Statt φx kann also gesetzt werden

$$\varphi' x = \varphi x + \alpha\,(x+\varphi x-d)+b. \qquad (a)$$

Dadurch wird $G = n.\,\dfrac{(x+\varphi x+\alpha\,(x+\varphi x-d)+b)-(e+\varphi e+\alpha\,(e+\varphi e-d)+b)}{(s+\varphi s+\alpha\,(s+\varphi s-d)+b)-(e+\varphi e+\alpha\,(e+\varphi e-d)+b)}$

welches identisch mit dem obigen Werth, da $-\alpha d+b$ subtraktiv sich hebt, und dann $1+\alpha$ oben und unten als Faktor dasteht.

Daraus folgt, dass wenn wir sämmtliche Ordinaten in einer der Gleichung (a) entsprechenden Art ändern würden, die Beobachtungstabelle A auf Seite 11 doch genau dieselbe geblieben wäre; nur die Fadenlängen müssten proportional verändert, d. h. nach einem andern Maassstabe gemessen werden. —

Nennen wir nun, auf die Gleichungen (7) zurückgehend, $\varphi' k_r$ die gefundene Verbesserung, so ist, da allgemein

$$\varphi k_r = H_r + V_k - M_b - k_r + \Phi_k + \Phi_r - M\varphi \qquad (9)$$

war, und $\varphi' k_r = H_r + V_k - M_b - k_r$ gesetzt wurde,

$$\varphi' k_r = \varphi k_r - (\Phi_k + \Phi_r - M\varphi) \qquad (10)$$

Der Ausdruck in der Klammer braucht nun nicht constant oder $= o$ zu sein, damit die gefundene Curve als Annäherung diene, — sondern es genügt, wenn dieser Ausdruck von der Form $\alpha\,(k_r+\varphi k_r-d)+b$ ist.

Wir können aber setzen

$$\Phi_k + \Phi_r - M\varphi = \frac{(\Phi_k+\Phi_r-2M\varphi)\,(k_r+\varphi k_r-(M_b+M\varphi)}{k_r+\varphi k_r-(M_b+M\varphi)} + M\varphi$$

so dass die Gleichung (10) jetzt folgendermassen sich gestaltet.

$$\varphi' k_r = \varphi k_r - \frac{\Phi_k+\Phi_r-2M\varphi}{H_r+V_k-2M_b+\Phi_k+\Phi_r-2M\varphi}[k_r+\varphi k_r-(M_b+M\varphi)] - M\varphi. \qquad (11)$$

Diese Gleichung, obwohl mit der einfacheren (10) identisch, spricht doch mehr aus, insofern sie den ganzen Gedanken der Methode darstellt: —

„Eine jede Ordinate erscheint erstens vermindert um ein Stück $M\varphi =$ der mittleren Verbesserung, zweitens um eine Länge, gleich dem Produkte aus der Entfernung des entsprechenden Skalenpunktes, vom Orte der verbesserten mittleren Beobachtung an gerechnet, in einen Werth

$$\alpha = -\frac{\Phi_k+\Phi_r-2M\varphi}{H_r+V_k-2M_b+\Phi_k+\Phi_r-2M\varphi} = -\frac{\Phi_k+\Phi_k-2M\varphi}{k_r+\varphi k_r-(M_b+M\varphi)}$$

Hieraus geht auf Grund der obigen Betrachtung über die Grösse α hervor, dass die ursprüngliche, oder eine dem Zwecke der Aufgabe ebensogut entsprechende Curve allemal gefunden werden wird, wenn α für alle Verbesserungen irgend einen constanten Werth erhält. Wenn letzteres der Fall ist, so ist die gefundene Curve nicht eine Annäherung, sondern sie ist als vollkommen identisch mit der ursprünglichen Curve zu betrachten.

Je genauer die Bedingung erfüllt, der Zähler von α seinem Nenner proportional ist, um so schneller führt die Rechnung zum Ziele. —

2. Ehe wir untersuchen, wie α sich für die einzelnen Beobachtungen gestalten wird, wollen wir aber darthun, dass alle die Werthe desselben um eine mittlere Grösse, die die Drehung der ganzen Curve bestimmt, sich herum gruppiren.

Behalten wir stets die Indices k und r bei, um eine ganze Gruppe von m . n Gleichungen durch eine einzige zu bezeichnen. Die Gleichungen (7) lauten identisch, wenn mit jeder Verbesserung eine der Gleichung (a) entsprechende Aenderung vorgenommen wird.

$$-\alpha d + b + \varphi k_r (1+\alpha) + \alpha . k_r = H_r + V_k - M_b (1+\alpha) - k_r + (\Phi_r + \Phi_k - M\varphi)(1+\alpha) - \alpha d + b$$

Setzen wir die gesuchten Verbesserungen

$$\varphi' k_r = -\alpha d + b + \varphi k_r (1+\alpha) + \alpha k_r = H_r + V_k - M_b - k_r + Ck_r \qquad (12)$$

so wird

$$Ck_r = (V_k + H_r - M_b)\alpha + (\Phi_k + \Phi_r - M\varphi)(1+\alpha) - \alpha d + b \qquad (13)$$

Zwischen den m . n Grössen Ck_r besteht folgende Beziehung:

Es sei

$$\begin{aligned} Ca_1 + Cb_1 + \ldots + Cn_1 &= n . C_1 \\ Ca_2 + Cb_2 + \ldots + Cn_2 &= n . C_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad &\quad\vdots \\ Ca_m + Cb_m + \ldots + Cn_m &= n . C_m \\ \hline Ca_1 + Ca_2 + \ldots + Ca_m &= m . C_a \\ Cb_1 + Cb_2 + \ldots + Cb_m &= m . C_b \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad &\quad\vdots \\ Cn_1 + Cn_2 + \ldots + Cn_m &= m . C_n \end{aligned} \qquad (14)$$

und

$$\frac{C_1 + C_2 + \ldots + C_m}{m} = \frac{C_a + C_b + \ldots + C_n}{n} = C_B.$$

Die zusammengehörigen Gleichungen in (12) geben:

$$\begin{aligned} -\alpha d + b + \Phi_1 (1+\alpha) + \alpha V_1 &= C_1 \\ -\alpha d + b + \Phi_2 (1+\alpha) + \alpha V_2 &= C_2 \\ \vdots \\ -\alpha d + b + \Phi_m (1+\alpha) + \alpha V_m &= C_m \\ \hline -\alpha d + b + \Phi_a (1+\alpha) + \alpha H_a &= C_a \\ -\alpha d + b + \Phi_b (1+\alpha) + \alpha H_b &= C_b \\ \vdots \\ -\alpha d + b + \Phi_n (1+\alpha) + \alpha H_n &= C_n \end{aligned} \qquad (15)$$

und diese ergeben

$$-\alpha d + b + M\varphi (1+\alpha) + \alpha M_b = C_B.$$

Aus (13) und (15) folgt allgemein

$$Ck_r = C_k + C_r - C_B \qquad (16)$$

Die Grössen α, d und b sind willkührlich; desshalb darf für dieselben solch eine Relation angenommen werden, dass $C_B = o$. Alsdann wird

$$-\alpha d + b + M\varphi (1+\alpha) + \alpha M_b = O \qquad (17)$$

d. h. die gesuchte Curve wird so gestaltet sein, dass das Mittel aus allen Verbesserungen = o.

Die Gleichung (12) zeigt, dass wir vorhin in unserer Rechnung alle die Grössen $Ck_r = o$ gesetzt haben; dadurch sind bestimmte Beziehungen zwischen α, d und b eingetreten, und zwar für jede Verbesserung eine andere. — Nehmen wir an, dass b und d in allen Gleichungen dieselben seien, und bezeichnen wir die aus Gleichung (13) sich ergebenden Werthe von α mit entsprechenden Zeichen, so wird allgemein wenn $Ck_r = o$

$$\alpha k_r = -\frac{b + \Phi_k + \Phi_k - M\varphi}{V_k + H_r - M_b + \Phi_k + \Phi_r - M\varphi - d} = -\frac{b + \Phi_k + \Phi_r - M\varphi}{k_r + \varphi k_r - d}$$

$$= -\frac{b + M\varphi + (\Phi_k + \Phi_r - 2M\varphi)}{V_k + H_r - 2M_b + \Phi_k + \Phi_r - 2M\varphi - (d - (M_b + M\varphi))}$$

Statt einer Verbesserung φk_r werden wir also erhalten

$$\varphi' k_r = \varphi k_r - \frac{b + M\varphi + (\Phi_k + \Phi_r - 2M\varphi)}{V_k + H_r - 2M_b + \Phi_k + \Phi_r - 2M\varphi - (d - (M_b + M\varphi))}(k_r + \varphi k_r - d) + b$$

Dieser Ausdruck ist wiederum ganz identisch mit dem der Gleichung (10). Die Herleitung aber, und insbesondere die Gleichungen (16) und (17) beweisen, dass alle αk_r sich um den Werth, der sich aus (17) ergiebt, gruppiren werden. Für $b = -M\varphi$, $d = M_b + M\varphi$ erhalten wir die frühere Gleichung (11).

3. Kehren wir zur Hauptfrage zurück, so erscheint es zunächst nothwendig einzusehen, welchen Verlauf die Werthe α_k nehmen werden, und ob wirklich der Ausdruck $\Phi_k + \Phi_r - 2M\varphi$ nahezu proportional $H_r + V_k - 2M_b$ sein wird, denn nach Gleichung (11) kommt es nur hierauf an.

Setzen wir voraus, dass in der Beobachtungstabelle A (Seite 11) ebenso viel Fäden, wie untere Hauptpunkte, von denen dieselben auslaufen, angenommen worden. Wenn ferner die Differenzen je zweier aufeinander folgender Fäden eben so gross wie die je zweier unterer Hauptpunkte ist, so werden stets die Beobachtungen in einer Diagonalrichtung, von links oben nach rechts unten, nahezu gleiche Orte der Skale einnehmen, insbesondere werden in der Diagonale selbst solche Skalenorte zu finden sein, die in der Nähe der mittleren Beobachtung M_b liegen, und hier wird der Ausdruck $V_k + H_r - 2M_b$, ebenso wie $k_r - M_b$, nahezu = o sein, dagegen allmählig nach rechts oben und links unten in entgegengesetztem Sinne an Werth zunehmen. Man überzeugt sich davon leicht, wenn man die 2. Tabelle (B) auf Seite 11 ansieht. Wenn von jedem Werthe in derselben die Grösse M_b abgezogen wird, so erhält man folgende

D. Tabelle der $H_r + V_k - 2.M_b$

+ 1.349	— 3.557	— 9.305	— 14.910	— 17.664	— 22.179	— 28.567	— 36.301
+ 6.748	+ 1.842	— 3.906	— 9.511	— 12.265	— 16.780	— 23.168	— 30.902
+ 11.512	+ 6.606	+ 0.858	— 4.747	— 7.501	— 12.016	— 18.404	— 26.138
+ 15.975	+ 11.069	+ 5.321	— 0.284	— 3.038	— 7.553	— 13.941	— 21.675
+ 19.997	+ 15.091	+ 9.343	+ 3.738	+ 0.984	— 3.531	— 9.919	— 17.653
+ 24.103	+ 19.197	+ 13.449	+ 7.844	+ 5.090	+ 0.575	— 5.813	— 13.547
+ 28.697	+ 23.791	+ 18.043	+ 12.438	+ 9.684	+ 5.169	— 1.219	— 8.953
+ 33.549	+ 28.643	+ 22.895	+ 17.290	+ 14.536	+ 10.021	+ 3.633	— 4.101

Es werden aber die Werthe von $\Phi_k + \Phi_r - 2M\varphi$ einen ähnlichen Gang befolgen. Im vorliegenden Falle, kennen wir die wahre Fehlerkurve und können daher aus derselben genau die Werthe dieses Ausdruckes ermitteln.

E. Tabelle der nach der fingirten Correktionskurve beobachteten Fehler φk_r

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	Φ_r
0	+ 1.57	+ 0.76	— 0.20	— 0.74	— 0.84	— 0.87	— 0.53	+ 0.71	— 0.017
5	+ 2.37	+ 1.67	+ 0.70	— 0.26	— 0.57	— 0.82	— 0.85	— 0.18	+ 0.257
10	+ 2.66	+ 2.41	+ 1.51	+ 0.57	+ 0.09	— 0.57	— 0.87	— 0.74	+ 0.632
15	+ 2.63	+ 2.66	+ 2.28	+ 1.35	+ 0.87	+ 0.07	— 0.71	— 0.88	+ 1.034
20	+ 2.26	+ 2.66	+ 2.62	+ 2.03	+ 1.57	+ 0.76	— 0.35	— 0.84	+ 1.339
25	+ 1.69	+ 2.37	+ 2.68	+ 2.52	+ 2.23	+ 1.45	+ 0.32	— 0.66	+ 1.575
30	+ 1.70	+ 1.70	+ 2.49	+ 2.68	+ 2.62	+ 2.21	+ 1.10	— 0.16	+ 1.792
35	+ 1.70	+ 1.70	+ 1.75	+ 2.56	+ 2.67	+ 2.62	+ 1.95	+ 0.62	+ 1.946
Φ_k	+ 2.072	+ 1.991	+ 1.729	+ 1.339	+ 1.080	+ 0.606	+ 0.007	— 0.266	+ 8.558
$\Phi_k - M\varphi$	+ 1.002	+ 0.921	+ 0.659	+ 0.269	+ 0.010	— 0.464	— 1.063	— 1.336	$M\varphi$ = + 1.0697 = + **1.07**

F. Tabelle der $\Phi_r + \Phi_k - 2\,M\varphi$

$\Phi_r - M\varphi$	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
—1.087	—0.085	—0.166	—0.428	—0.818	—1.077	—1.551	—2.150	—2.423
—0.813	+0.189	+0.108	—0.154	—0.544	—0.803	—1.277	—1.876	—2.149
—0.438	+0.564	+0.483	+0.221	—0.169	—0.428	—0.902	—1.501	—1.774
—0 036	+0.966	+0.885	+0.623	+0.233	—0.026	—0.500	—1.099	—1.372
+0.269	+1.271	+1.190	+0.928	+0.538	+0.279	—0.195	—0.794	—1,067
+0.505	+1.507	+1.426	+1.164	+0.774	+0.515	+0.041	—0.558	—0.831
+0.722	+1.724	+1.643	+1.381	+0.991	+0.732	+0.258	—0.341	—0.614
+0.876	+1.878	+1.797	+1.535	+1.145	+0.886	+0.412	—0.187	—0.460

Beiläufig bemerke man, dass die Differenzen entsprechender Zahlen der Tabellen C (S. 11) und E, von den Grössen der entsprechenden Tabelle F constant um $M\varphi = 1.07$ abweichen müssen, was im Einklange mit Gleichung (10) bis auf kleine Schätzungsfehler der Tabelle E stattfindet.

4. Stellen wir uns, um den Grund für den Verlauf der Zahlen in Tab. F zu erkennen, noch einmal die ursprüngliche Anordnung der Beobachtungen vor, wie sie schematisch auf Seite 5 erörtert wurde. Wir hatten die Tabelle

$$\begin{array}{l} a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_m \\ b_1\ b_2\ b_3 \ldots\ldots b_m \\ c_1\ c_2\ c_3 \ldots\ldots c_m \\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots \\ n_1\ n_2\ n_3 \ldots\ldots n_m \end{array}$$

Nahezu einander gleich sind die Beobachtungen $a_1, b_2, c_3 \ldots\ldots n_m$,

ebenso $a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_m = a_m + b_m + \ldots\ldots + n_m$, in der unteren Hälfte

und $a_1 + b_1 + \ldots\ldots n_1 = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_m$ in der oberen Halfte

der Skale liegend, oder anders ausgedrückt

$$\text{ist } V_1 + H_a \text{ nahezu} = V_2 + H_b = \ldots\ldots = V_m + H_n$$

und zwar $= 2\,M_b$, weil $n_1 \ldots\ldots c_1, b_1, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ sich gleichmässig über die ganze durch die oberen Enden beobachtete Skale erstrecken. Ferner sind die Summen H_a und V_m einander nahe gleich, und ebenso andererseits V_1 und H_n, nur haben diese Paare zur Summe vereinigt, die äussersten Werthe die bei der Combination $V_k + H_r$ möglich sind, — und nahezu, d. h. dem Gedanken der Methode gemäss, wird

$$H_a + V_m - 2\,M_b = -(V_1 + H_n - 2\,M_b)$$

sein; und ebenso

$$H_a + V_{m-1} - 2\,M_b = -(V_1 + H_{n-1} - 2\,M_b) \text{ u. s. w.}$$

Für die Fehlersummen wird aber im Allgemeinen eine ähnliche Beziehung statthaben, wenn die Correctionskurve nicht ganz besonders ungünstig beschaffen ist. Denken wir uns dazu die vorliegende Curve zunächst der Art parallel mit sich selbst verschoben, dass der mittlere Fehler = o, so wird die Fehlersumme auf der einen Hälfte der Skale vom Orte der mittleren Beobachtung an gerechnet, denselben Werth, nur mit entgegengesetztem Zeichen haben, als die Fehlersumme der anderen Hälfte. — Ganz wie früher in der Diagonale von links nach rechts die Combination $V_k + H_r - 2\,M_b$ nahezu = o war, so wird auch jetzt die Fehlersumme $\Phi_1 + \Phi_a = \Phi_2 + \Phi_b = \ldots\ldots = \Phi_m + \Phi_n = o$ sein (oder $= 2\,M\varphi$, wenn letzteres nicht = o gedacht wird), weil die Fehler ebenso wie die entsprechenden Beobachtungen sich über die ganze Curve gleichartig verbreiten. Dagegen sind, analog dem früher für die beobachteten Skalenpunkte Bemerkten, die extremsten Werthe die der $\Phi_1 + \Phi_n$ und die der $\Phi_a + \Phi_m$ und zwar so, dass $\Phi_1 + \Phi_n = -(\Phi_a + \Phi_m)$, nahezu $= 2\,\Phi_1 = 2\,\Phi_n = -2\,\Phi_a = -2\,\Phi_m$. Dieser Fall wird allemal Statt haben, wenn die Verbesserungskurve etwa die Gestalt

der Fig. 1, Taf. IV hat. Man übersieht auch leicht, dass alsdann, wie vorhin für die Beobachtungen, so jetzt für die combinirten Fehlersummen identische Werthe sich in allen Diagonalen, von links oben nach rechts unten, ergeben werden, und ferner wird auch hier ein allmähliger Uebergang der Werthe von der äussersten Ecke rechts oben nach der links unten gelegenen stattfinden. Man werfe nur einen Blick auf die Zahlen der zuletzt gegebenen Tabelle, beachte namentlich, dass die Fehlersumme beim ersten und dritten Viertel der beobachteten Skalenstrecken, nahezu den halben Zahlenwerth der für Anfang und Ende derselben gefundenen besitzen. (Im vorliegenden Falle betragen die Fehlermittel an den äussersten Gegenden der Skale, d. h. bei 87° und 14° resp. + 2° und — 2°, dagegen bei 70° und 35° resp. + 1° und — 1°, und in der Mitte bei 52°.6, 0°.)

Je häufiger die Verbesserungskurve auf jeder Seite des mittleren Beobachtungsortes über und unter die Abscissenaxe sinkt, um so besser wird die erste Annäherung werden, weil alsdann die mittleren Fehlersummen sämmtlich kleine Werthe haben, und nur wenig schwanken werden. Der Nenner von α wird verhältnissmässig gross, und wir erhalten nahezu $\varphi' k_r = \varphi k_r - M\varphi$. Wenn z. B die Curve Fig. 1. a Taf. IV der wahren Verbesserung entspräche, der mittlere Fehler = o, aber auch die äussersten Werthe der Fehlersumme für die Strecken A bis m, und mithin auch die von m bis x = o, so werden sämmtliche Fehlersummen kleine Werthe annehmen, (die Φ_k und Φ_r sind arithmetische Mittel dieser Summen). Sobald aber der mittlere Fehler = o, und die Fehlersumme auf der einen, so wie die auf der anderen Hälfte für sich auch = o, — oder beiderseits constant und gleich dem mittleren Fehler, so wird die gefundene niemals im Vergleich zur ursprünglichen fingirten Curve, gedreht erscheinen; es können dann ausser paralleler Verschiebung der ganzen Curve nur die Maxima und Minima mehr oder weniger entstellt werden. Und zwar wird das stets geschehen, wenn in der Mitte der Skale sämmtliche Fehler etwa positiv, und an den beiden äussern Vierteln dieselben negativ sind, d. h. wenn die Correktionskurve so gestaltet, wie etwa Fig. 1. b. Taf. IV. Die Fehlersummen in Am und mx seien = o, und mithin auch der mittlere Fehler = o; die Curve wird im Endresultat nicht gedreht erscheinen können, die Biegungen in der Mitte aber werden vertieft werden, wie in der Fig. durch Striche angedeutet, so, dass auch in der Mitte die Fehlersumme über die halbe Skalenstrecke = o geworden. Mehre Beispiele dieser Art habe ich berechnet, und das Resultat zeigt sich ganz in Uebereinstimmung mit dieser Darstellung. Beiläufig bemerke ich, dass das Besselsche Thermometer genau solch einem ungünstigen Falle entspricht. Anwendbar bleibt trotzdem die Methode, weil die durch die äusseren Fäden erhaltenen Verbesserungen in entgegengesetztem Sinne abweichen, so dass doch ein dem Mittelwerthe von α entsprechender Zug der Curve auch in diesem Falle erreicht wird. Meist aber werden mehrfache Annäherungen gesucht werden müssen [1]).

Um mit Sicherheit solchen Fällen zu entgehen, combinirt man am besten die Hällströmsche Methode mit der Besselschen. Auf welche Weise dieses geschehen muss, soll später eingehend erörtert werden. —

5. Untersuchen wir nun, wie im vorliegenden Zahlenbeispiele der Werth von αk_r für jede einzelne Beobachtung sich gestaltet. — Dazu bilden wir die Summen der zusammengehörigen Werthe der Tabellen D und F (Seite 22 u. 23) zur folgenden Tab. G, dividiren dann die Zahlen in D durch die in G, wodurch die Werthe α in Tabelle H entstehen werden.

---

1) Bessel behauptet zwar, es werde meist die erste Rechnung genügen; allein so sehr das von ihm gewählte Thermometer auch in der Gegend der unteren Hauptpunkte falsch war, so gering sind die nothwendigen Verbesserungen der oberen Enden, so dass nach der ersten ziemlich mangelhaften Annäherung man schon im Gebiet der Beobachtungsfehler sich befindet. Hätte Bessel sein Thermometer von den oberen Hauptpunkten aus beobachtet, so wäre das Resultat ganz anders ausgefallen.

G. Tabelle der $H_r + V_k - 2M_b + (\Phi_r + \Phi_k - 2M\varphi) = k_r + \varphi k_r - (M_b + M\varphi)$

+ 1.264	— 3.723	— 9.733	—15.728	— 19.741	—23.730	—30.717	—38.724
+ 6.937	+ 1.950	— 4.060	—10.055	— 13.068	—18.057	—25.044	—33.051
+12.076	+ 7.089	+ 1.079	— 4.916	— 7,929	—12.918	—19.905	—27.912
+16.941	+11.954	+ 5.944	— 0.051	— 3.064	— 8.053	—15.040	—23.047
+21.268	+16.281	+10.271	+ 4.276	+ 1.263	— 3.726	—10.713	—18.720
+25.610	+20.623	+14.613	+ 8.618	+ 5.605	+ 0.616	— 6.371	—14.378
+30.421	+25 434	+19.424	+13.429	+10.416	+ 5.427	— 1.560	— 9.567
+35.427	+30.440	+24.430	+18.435	+15.422	+10.433	+ 3.446	— 4.561

H. Tabelle der αk_r (negativ zu nehmen).

0.067	0.045	0.044	0.052	0.054	0.065	0.070	0.063
0.027	0.055	0.038	0.054	0.061	0.070	0.075	0.065
0.046	0.068	0.021	0.035	0.054	0.070	0.07[illegible]	0.063
0 057	0.074	0.105!	— 4.57 !	0 009	0.062	0.073	0.059
0 060	0.073	0.090!	0.126!	0.221!	0.052	0.074	0.057
0.059	0.070	0.080	0.090	0.090!	0.066	0.087	0.058
0.057	0.064	0 07[illegible]	0.074	0.070	0.047	0.219!	0.064
0.053	0.059	0 063	0.062	0.057	0.040	— 0.054!	0.101!

Nicht sehr verschieden sind die α in den äussersten Ecken der Tabelle, rechts oben und links unten, wohl aber in der Diagonale von links oben nach rechts unten, d. h. für die Orte der mittleren Beobachtung M_b, — wie durch Ausrufungszeichen angedeutet worden. — In dem Ausdruck

$$\frac{[(k_r + \varphi k_r) - (M_b + M\varphi)] . \Phi_k + \Phi_r - 2M\varphi}{V_k + H_r - 2M_b + \Phi_k + \Phi_r - 2M\varphi}$$

kann der Nenner allerdings in der Mitte der Skale klein werden, so dass α sehr gross, sogar entgegengesetzten Zeichens wird, wie z B = + 4.57 statt — 0.063 in der vierten Columne der Tabelle H. Dieser Fall hebt das vorhin Behauptete nicht auf, da der Nenner von α stets gleich dem Faktor $(k_r + \varphi k_r - (M_b + M\varphi)$ ist, und sich gegen diesen hebt. Man braucht nur zur einfachen Gleichung (10) zurückzukehren, um den continuirlichen Verlauf der Differenzen von $\varphi' k_r$ und φk_r wahrzunehmen.

Eben diese Gleichung (10) lehrt uns auch erkennen, wo die fingirte und die gefundene Curve sich durchschneiden werden. Offenbar an dem Punkte der Skale, wo $\varphi' k_r = \varphi k_r$, d. h. wo $\Phi_k + \Phi_r - M\varphi = 0$. — Die Taf. I Fig. 1 und 2 geben den Werth $37^0.50 - 0^0.79 = 36^0.71$ und nahezu dasselbe Tabelle F Seite 23, verglichen mit A Seite 11. — Setzen wir in Gleichung (17) diesen Werth für d ein, und setzen ferner b = 0, d. h. verschieben wir nicht die Curve parallel mit sich selbst, sondern drehen sie sogleich um diesen Durchschnittspunkt, so wird

$$\alpha = \frac{-1.070}{55.664 + 1.070 - 36^0.71} = -0.0626$$

Das heisst, das graphische Mittel wird gegen die fingirte Curve der Art gedreht erscheinen, dass jede Ordinate der letzteren verändert erscheint um einen Werth, der gleich dem Produkt aus der Entfernung des entsprechenden Skalenpunktes in die Zahl — 0.0626.

Man bemerke noch, dass bei der Abscisse der mittleren Beobachtung $M_b = 52^0.664$ die Differenz der beiden Curven genau $= 1^0.070$, d. h. $= M\varphi$, dass also dieser Skalenort Drehungspunkt wird, nachdem die ursprüngliche Curve parallel mit sich selbst um $M\varphi$ verschoben.

Schliesslich ist wohl zu beachten, dass der nahezu constante Werth von αk_r nur dann wird statthaben können, wenn, wie wir vorhin in der allgemeinen Erörterung voraussetzten, die Anzahl der Vertikalkolumnen gleich der der Horizontalreihen, oder mit anderen Worten, wenn ebenso viel Fäden als untere Ausgangspunkte derselben gewählt worden sind. Je weniger man dieser Bedingung nachkommt, um so weniger wird die erste Annäherung diesen Namen beanspruchen dürfen. — Ich habe es versucht, die vorliegende Curve zu berechnen, indem ich nur 2 Vertikal- und 8 Horizontalreihen, und anders nur 2 Horizontal- und 8 Ver-

tikalreihen berücksichtigte. Das Resultat zeigt kaum eine Aehnlichkeit mit der zu findenden Curve. — Ebenso gilt die Bedingung, dass die einzelnen Fäden nahezu um ebensoviel von einander differiren, wie die unteren Hauptpunkte. —

Mit nur 4 Vertikal- und 4 Horizontalreihen bekommt man fast genau die zu findende Linie, dagegen mit 4 Vertikal- und 8 Horizontalreihen eine völlig entstellte. Bessel giebt garnichts hierüber an. In seinem Beispiele nimmt er 8 Vertikal- und 10 Horizontalreihen in Rechnung. — Bei allen Beispielen im IV. Abschnitt kommen wir auf diesen Gegenstand wieder zurück. —

6. Fragen wir uns jetzt, ob eine Gestaltsänderung an einer Stelle der Correctionskurve wesentlich den Werth der Verbesserungen von φk_r an anderen modificiren müsste, und untersuchen wir, ob, wenn die Correktionskurve plötzlich eine Biegung auf und ab machte, diese aber schliesslich nicht im Resultat zum Vorschein käme, dieser Fehler von Einfluss, nicht bloss für die Nachbartheile, sondern auch für alle übrigen Punkte der Skale sein müsste? Fragen wir uns endlich, welcher Art sich plötzliche Veränderungen, — Erweiterungen oder Verengerungen des Kalibers — in der Correktionskurve geltend machen werden?

Wir denken uns den inneren Raum des Thermometers in Gestalt eines Revolutionskörpers, so dass die auf der Längenaxe des Thermometers senkrechten Radien alle Veränderungen des Kalibers bestimmen. Es sei der Radius irgend eines Querschnittes mittlerer Grösse constant $= c$ (Fig. 3 Taf. IV), und der Ueberschuss des Radius an einer Stelle x gleich z, so gehört zur Abscisse x der Radius $c + z$, und das innere Volumen von o bis x ist

$$= \int_0^x \pi (c + z)^2 \, . \, dx.$$

Da $\pi c^2 \, . \, x$ das zum Cylinder mit dem Radius c gehörige Volumen ist, so wird an jeder Stelle x die Verbesserung $\varphi x = \int_0^x \pi \, . \, z \, . \, (2c + z) \, . \, dx$. — Führen wir zur Vereinfachung eine Variable y für die Differenz des wirklichen und des normalen Querschnittes ein, so ist

$$y = \pi \, . \, z \, (2c + z)$$

$$\text{und } y = \frac{d \varphi x}{dx} \text{ oder } \varphi x = \int_0^x y \, . \, dx.$$

Denken wir uns jetzt den Ueberschuss des Querschnittes, linear als Ordinate des entsprechenden Punktes x der Skale, und nennen die durch Verbindung der Ordinatenendpunkte entstehende Linie „Kaliberkurve", so ist diese die Differentialkurve der bereits früher definirten „Fehler- oder Correktionskurve". Daraus folgt unmittelbar:

1) Das Thermometer hat nur da die normale Radiuslänge, wo die Corrections-Curve parallel der Abscissenaxe verläuft, und überall, wo φx ein Maximum oder Minimum hat, da ist der Querschnitt des Thermometers $= \pi c^2$.

2) Die Maxima und Minima der Kaliberkurve entsprechen den Inflexionspunkten der Correctionskurve.

3) Jede plötzliche auf und abgehende Biegung der Correktionskurve entspricht einer derartigen Zu- und Abnahme des Querschnittes, dass wenn $\varphi x_1 = \varphi x_2$, die Volumenzunahme von x_1 bis x_2 normal ist $= \pi c^2 (x_2 - x_1)$.

Die in grösserem Maassstabe gezeichnete Fig. 4 Taf. IV. mag dieses deutlicher veranschaulichen:

1) Den Maximis und Minimis der Correctionskurve bei x_b, x_d, x_f, x_h, x_k, x_l entsprechen ebenso viele normale Querschnittspunkte der Kaliberkurve: b, d, f, h, k, l.

2) Wenn ferner von x_a bis $x_{a'}$, die Correctionskurve in gerader Linie verläuft, so ist die Querschnittskurve parallel der Axe.

3) Ist φx constant wie von x_l bis x_m, so ist der Querschnitt normal von l bis m.

4) Den Inflexionspunkten x_c, x_e, x_g, x_i, entsprechen ebenso viele Maxima und Minima des Querschnittes.

5) Wenn ferner ein Correctionsglied $\varphi x_c = \varphi x_f$. so ist das Integral $\int_{x_c}^{x_f} y\,dx = cc'd + def = o$. Ebenso wenn $\varphi(o) = o$, und $\varphi x = o$, so ist das Volumen von O bis $x = \pi . x . c^2$, und das Integral der Kaliberkorrektion ist $= 0$.

Wenn nun in unserer Correctionsmethode eine Gestaltsänderung in der Fehlerkurve, wie die von x_c bis x_f verschwindet, so sind trotzdem die Verbesserungen ausserhalb der Strecke $x_c x_f$ richtig, innerhalb derselben der Fehler sehr klein. —

Andrerseits sieht man aus der vorstehenden Erörterung, dass jede plötzliche Erweiterung (oder Verengerung) des Querschnittes blos ein Ansteigen (und resp. Fallen) der Fehlerkurve zur Folge hat, nicht aber ein Auf- und Absteigen der letzteren.

Eine plötzliche bleibende Verengerung des Querschnittes bringt in der Kaliberkurve eine Discontinuität, in der Fehlerkurve blos eine Spitze hervor. Wenn die Querschnittskurve ähnlich der Fig. 5 Taf. IV, so erhält die Correctionskurve an der Stelle, wo dort eine Stetigkeitsunbrechung war, hier eine Spitze (Fig. 6). — Stetigkeitsunterbrechungen endlich können in der Fehlerkurve, wie leicht einzusehen, garnicht vorkommen, denn das würde den Widerspruch voraussetzen, dass irgendwo eine Volumenverminderung eintrete, oder die Thermometerröhre zu einem unendlich weiten Gefäss sich erweitere. Ueberhaupt sieht man, dass $\frac{d\varphi x}{dx}$ nur zwischen $+\infty$ und $-\pi c^2$ schwanken kann. Die Fehlerkurve kann zwar sehr rasch ansteigen, abwärts aber nicht über die angegegebene Grösse hinaus sich senken. Der Grenzfall eines sehr grossen Werthes von $\frac{d\varphi x}{dx}$ liegt ausser dem Bereich unserer Aufgabe. Aus der letzten Betrachtung geht deutlich hervor, dass die Skale, die mit der Thermometerröhre verbunden ist, bedeutend falsch sein kann, ohne dass die Methode aufhört, brauchbar zu sein. Die Einschränkung, die Bessel betont, und die später oft nachgesprochen worden (so z. B. in Gehler's Wörterbuch), nach welcher die Skale annähernd richtig getheilt sein müsse, fällt somit fort, und es erscheint der Gebrauch und die Anwendbarkeit der Besselschen Methode erweitert.

IV. Beispiele, zur Ergänzung der Methode.

1. Eine Schwierigkeit besonderer Art haben alle Probleme, bei denen allgemein entwickelte Formeln schliesslich in der Praxis nur in gewissen Gränzen gelten. Die Bedeutung der einzelnen Grössen muss im Sinne der Anwendung gedacht, und eingeschränkt werden. Das Maass dieser Einschränkung aber ist kaum festzustellen. Deshalb scheint es nothwendig, mannigfach ersonnene Beispiele durchzuführen, die einen Einblick in die Zuverlässigkeit des Verfahrens gestatten, und Denjenigen, die die Methode anwenden wollen, eine ähnliche Arbeit ersparen. Ohne dieselbe kann, wie ich meine, kein rechtes Zutrauen zur Methode gefasst werden. Auf Eines sei bei dieser Gelegenheit gestattet hinzuweisen: So weitläufig die Behandlung und insbesondere die Beschreibung des einzelnen Beispieles dem Leser erscheinen mag, so einfach und kurz bleibt doch die Rechnung in den meisten praktischen Fällen, und ich darf hier auf die kaum eine halbe Stunde Zeit erfordernde Zusammenstellung im V. Abschnitte Punkt 8 hinweisen. — Die meisten hier behandelten Beispiele beziehen sich auf einen möglichst grossen Grad von Genauigkeit, wie ein solcher sehr oft bei Versuchen zur Bestimmung physikalischer Constanten erfordert wird.

Von verschiedenen Gesichtspunkten aus wird die Untersuchung der folgenden drei Beispiele vorgenommen werden. — An dem ersten stellen wir uns die Frage, wie weit 1) die absolute Grösse der Verbesserungen auf das Resultat von Einfluss ist, 2) welcher Art Beobachtungen mit kürzeren Fäden, die nicht in das Schema der theoretischen Entwickelung hinein-

passen, durch Ermittelung der Fadenlängen sich verwerthen lassen, 3) welche Genauigkeit eine abgekürzte Rechnung gewährt, wenn die Anzahl verwertheter Beobachtungen beschränkt wird und welcher Art letzteres geschehen kann. — Dem zweiten Beispiele wird eine Verbesserungskurve mit bedeutenden Schwankungen innerhalb kurzer Gradstrecken zu Grunde gelegt, und gezeigt, dass eine grosse Anzahl von Beobachtungen schon bei der ersten Annäherung fast genau die ursprüngliche Curve wiedergiebt, während eine beschränkte Auswahl derselben zu keinem sicheren Resultate führt. — An dem dritten Beispiele soll die Frage erörtert werden, ob ein doppeltes Verfahren, wie Bessel ein solches empfiehlt, nämlich ausser der ersten Berechnung noch die der unteren Fadenenden von festen oberen Hauptpunkten aus, zweckdienlich sei. — Dann erst im V. Abschnitt werden sämmtliche Erfahrungen der Behandlung eines wirklichen Thermometers zu Grunde gelegt. —

2. Die in dem vorhin entwickelten Beispiele angenommenen Verbesserungen sind verhältnissmässig sehr gross. Sollte der Erfolg der Rechnung zweifelhaft werden, wenn der Maassstab für die Ordinaten der Fig. 1 Taf. I um's 10-fache vergrössert, die Verbesserungen mithin in demselben Verhältnisse vermindert würden?

Schon die theoretische Erörterung lehrt, dass das keineswegs der Fall sein könne, denn in der Gleichung (10) Seite 20 sind sämmtliche Grössen in ein und demselben Maasse verkleinert, also das Verhältniss der $\Phi_k + \Phi_r - M\varphi$ zu φk_r unverändert. Das mittlere α wird nahezu um's 10-fache verkleinert erscheinen müssen, da der Nenner nahezu unverändert ist, und dasselbe wird für die α_k jeder einzelnen Verbesserung $\varphi' k_r$ gelten. Wenn aber wie in der folgenden Rechnung nur hundertstel Grade bei Herstellung der Beobachtungen berücksichtigt werden, so wird voraussichtlich schon die zweite Annäherung in das Gebiet der Beobachtungsfehler hinein führen.

Die Mittheilung der Rechnung hätte hier erspart werden können, wenn nicht der Vergleich der erhaltenen Annäherung mit dem auf Seite 11 gewonnenen Resultate von Interesse wäre. — Die Curve der Fig. 1 Taf. I ist auf Taf. II reproducirt; die Strecke, die ebenso gross, wie ein ganzer Grad der Abscisse, stellt hier bei den Ordinaten nur $^1/_{100}$ Grad dar. Bruchtheile der letzteren wurden vernachlässigt.

Beobachtungen k_r nach der Curve Taf. II Fig. 1.

Untere Hauptpunkte.	I.	II.	III.	IV.	V	VI.	VII.	VIII.	m. H_r	H_r
0	54.80	49.91	44.02	38.08	35.09	30.09	23.05	14.93	289.97	36.246
5	59.81	54.89	49.00	43.10	40.13	35.15	28.15	20.07	330.30	41.287
10	64.81	59.83	53.92	48.03	45.08	40.14	33.19	25.15	370.15	46.269
15	69.81	64.80	58.82	52.92	49.98	45.07	38.14	30.15	409.69	51.211
20	74.81	69.75	63.73	57.77	54.82	49.91	43.04	35.09	448.92	56.115
25	79.77	74.75	68.67	62.67	59.68	54.75	47.89	40.00	488.18	61.022
30	84.77	79.75	73.71	67.65	64.64	59.66	52.77	44.92	527.84	69.980
35	89.76	84.74	78.75	72.69	69.66	64.64	57.68	49.83	567.75	70.969
n. V_k:	578.31	538.42	490.62	442.91	419.08	379.41	323.91	260.14	3432.80	
V_k:	72.289	67.302	61.327	55.364	52.385	47.426	40.489	32.518	8. M_b = 429 100 M_b = **53.637**	

$H_r - M_b$	Tabelle der $V_k + H_r - M_b$.								Differenz je 2-er auf einanderfolgender Hr—Mb.	Verbesserungen der unteren Hauptpunkte
— 17.391	54.898	49.911	43.936	37.973	34.994	30.035	23.098	15.127	5° + 0.041	+ 0.192
— 12.350	59.939	54.952	48.977	43.014	40.035	35.076	28.139	20.168	5° — 0.018	+ 0.233
— 7.368	64.921	59.934	53.959	47.996	45.017	40.058	33.121	25.150	5° — 0.058	+ 0.215
— 2.426	69.863	64.876	58.901	52.938	49.959	45.000	38.063	30.092	5° — 0.096	+ 0.157
+ 2.478	74.767	69.780	63.805	57.842	54.863	49.904	42.967	34.996	5° — 0.093	+ 0.061
+ 7.385	79.674	74.687	68.712	62.749	59.770	54.811	47.874	39.903	5° — 0.042	— 0.032
+ 12.343	84.632	79.645	73.670	67.707	64.728	59.769	52.832	44.861	5° — 0.011	— 0.074
+ 17.332	89.621	84.634	78.659	72.696	69.717	64.758	57.821	49.850		— 0.085

Erste Verbesserungen $\varphi k_r = V_k + H_r - M_b - k_r$ in $^1/_{1000}$ Grad, eingetragen auf Taf. II. Fig. 2.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	Controlle.
	+ 98	+ 1	— 84	— 107	— 96	— 55	+ 48	+ 197	+ 344 — 342
	+ 129	+ 62	— 23	— 86	— 95	— 74	— 11	+ 98	+ 289 — 289
	+ 111	+ 104	+ 39	— 34	— 63	— 82	— 69	— —	+ 254 — 248
	+ 53	+ 76	+ 81	+ 18	— 21	— 70	— 77	— 58	+ 228 — 226
	— 43	+ 30	+ 75	+ 72	+ 43	— 6	— 73	— 94	+ 220 — 216
	— 96	— 63	+ 42	+ 79	+ 90	+ 61	— 16	— 97	+ 272 — 272
	— 108	— 105	— 40	+ 57	+ 88	+ 109	+ 62	— 59	+ 316 — 312
	— 139	— 106	— 91	+ 6	+ 57	+ 118	+ 141	+ 20	+ 342 — 336
Controlle	+ 391	+ 273	+ 237	+ 232	+ 278	+ 288	+ 251	+ 315	
	— 386	— 274	— 238	— 227	— 275	— 287	— 246	— 308	

3. Die Fig. 2 Taf. II gewonnene Mittelkurve wurde der zweiten Annäherung zu Grunde gelegt. Statt den Beobachtungen k_r die abgelesenen Fehler hinzuzufügen, können wir die letzteren selbst der Rechnung unterwerfen. — Zwar sind die Zahlen dadurch kleiner, aber ein reeller Vortheil scheint kaum geboten, weil von Anfang an positive und negative Grössen unterschieden werden müssen, auch eine Tabelle mehr zu berechnen ist, wie die folgende Zusammenstellung lehrt.

Erste Verbesserungen der Beobachtungen in $^1/_{1000}$ Grad nach der Curve der arithmetischen Mittel Taf. II Fig. 2. Zunahme der k_r

Untere Hauptpunkte	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.		Zunahme der H_r
0	+ 65	— 3	— 76	— 90	— 85	— 58	+ 28	+ 178	+ 271 — 312 = — 41	— 5
5	+ 101	+ 66	— 13	— 81	— 90	— 85	— 38	+ 79	+ 246 — 307 = — 61	— 7
10	+ 88	+ 101	+ 50	— 26	— 68	— 90	— 77	— 5	+ 239 — 266 = — 27	— 3
15	+ 37	+ 88	+ 99	+ 34	— 1	— 68	— 90	— 58	+ 258 — 212 = + 41	+ 5
20	— 56	+ 37	+ 94	+ 95	+ 65	— 2	— 82	— 85	+ 291 — 225 = + 66	+ 8
25	— 99	— 55	+ 48	+ 98	+ 101	+ 65	— 28	— 90	+ 312 — 272 = + 40	+ 5
30	— 107	— 98	— 38	+ 61	+ 88	+ 101	+ 33	— 70	+ 283 — 313 = — 30	— 4
35	— 149	— 107	— 94	— 12	+ 38	+ 88	+ 95	— 3	+ 221 — 355 = — 134	— 17
	+ 291	+ 292	+ 291	+ 288	+ 292	+ 254	+ 156	+ 257	+ 2121 — 2267	
	— 401	— 263	— 221	— 209	— 244	— 303	— 315	— 311		
Zunahme der V_k	— 110	+ 29	+ 70	+ 79	+ 48	— 49	— 159	— 54	$-\frac{18}{8} = -2$ Zunahme von M_b	
	— 14	+ 4	+ 9	+ 10	+ 6	— 6	— 20	— 7		

Zunahme der unt. Correkt. $H_r - M_b$	Zunahme der $V_k + H_r - M_b$							Verbesserungen der unteren Hauptpunkte.
— 3	— 17	+ 1	+ 6	+ 7	+ 3	— 9	— 23	— 10	+ 0.199
— 5	— 19	— 1	+ 4	+ 5	+ 1	— 11	— 25	— 12	+ 0.238
— 1	— 15	+ 3	+ 8	+ 9	+ 5	— 7	— 21	— 8	+ 0.224
+ 7	— 7	+ 11	+ 16	+ 17	+ 13	+ 1	— 13	— —	+ 0.174
+ 10	— 4	+ 14	+ 19	+ 20	+ 16	+ 4	— 10	+ 3	+ 0.081
+ 7	— 7	+ 11	+ 16	+ 17	+ 13	+ 1	— 13	— —	— 0.015
— 2	— 16	+ 2	+ 7	+ 8	+ 4	— 8	— 22	— 9	— 0.066
— 15	— 29	— 11	— 6	— 5	— 9	— 21	— 35	— 22	— 0.090

Zunahme der $+ V_k + H_r - M_b - k_r$

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
	— 82	+ 4	+ 82	+ 97	+ 88	+ 49	— 51	— 188
	— 120	— 67	+ 17	+ 86	+ 91	+ 74	+ 13	— 91
	— 103	— 98	— 42	+ 35	+ 73	+ 83	+ 56	— 3
	— 44	— 77	— 83	— 17	+ 14	+ 69	+ 77	+ 58
	+ 52	— 23	— 75	— 75	— 49	+ 6	+ 72	+ 88
	+ 92	+ 66	— 32	— 81	— 88	— 64	+ 15	+ 90
	+ 91	+ 100	+ 45	— 53	— 84	— 109	— 55	+ 61
	+ 110	+ 96	+ 88	+ 7	— 47	— 109	— 130	— 19
Controlle.	+ 345	+ 266	+ 232	+ 225	+ 266	+ 281	+ 233	+ 297
	— 349	— 265	— 232	— 226	— 268	— 282	— 236	— 301

Zweite Verbesserungen: in $^1/_{1000}$ Grad graphisch auf Taf. II Fig. 3.

	+ 16	+ 5	— 2	— 10	— 8	— 6	— 3	+ 9
	+ 9	— 5	— 6	— —	— 4	— —	+ 2	+ 7
	+ 8	+ 6	— 3	+ 1	+ 10	+ 1	— 13	— 3
	+ 9	— 1	— 2	+ 1	— 7	— 1	— —	— —
	+ 9	+ 7	— —	— 3	— 6	— —	— 1	— 6
	— 4	+ 3	+ 10	— 2	+ 2	— 3	— 1	— 7
	— 17	— 5	+ 5	+ 4	+ 4	— —	+ 7	+ 2
	— 29	— 10	— 3	+ 13	+ 10	+ 9	+ 11	+ 1
Controlle.	+ 51	+ 21	+ 15	+ 19	+ 26	+ 10	+ 20	+ 19
	— 50	— 21	— 16	— 15	— 25	— 10	— 18	— 16

Alle Verbesserungen der zweiten Annäherung sind sehr gering. Der grösste Werth ist — 0°.029 für die letzte Beobachtung des ersten Fadens. — Auch die Correktionen der unteren Hauptpunkte erscheinen nur wenig geändert; doch sind sie zu berücksichtigen, da für die Hauptpunkte 15° und 20° $^2/_{100}$ Grade hinzukommen. Das arithmetische Mittel ist in Taf. II Fig. 3 gewonnen, und zeigt namentlich bei den Abscissen 35° und 70° noch bemerkenswerthe Verbesserungen. — Wenn man diese in die Fig. 2 einträgt, so entsteht die durch Kreuze bezeichnete punktirt ausgeführte Curve.

4. Führen wir ähnlich wie früher Seite 19 mit Zugrundelegung des Werthes $\alpha = -0.0058$ diese Curve auf die der Fig. 1 zurück, so entsteht die durch Kreuze bezeichnete Curve.

Der Unterschied beträgt nirgends einen $^1/_{100}$ Grad, — ausgenommen bei der Abscisse 22°,5, wo wir die starke Biegung und damit verbundene schwierige Schätzung in der Beobachtung, und zudem noch wenige Beobachtungen haben.

5. Die Berechnung einer dritten Annäherung, die in dem zuerst berechneten Beispiele noch merkliche Werthe ergab, erscheint hier völlig überflüssig. — Nur die nur durch wenig Beobachtungen vertretenen oberen Enden der Skale dürften genauere Berücksichtigung verdienen, und das zwar durch diejenigen Beobachtungen, welche mit kürzeren Fäden angestellt sind. Die unteren Enden derselben können nämlich beträchtlich weiter in der Thermometerröhre fortgeschoben werden, und gestatten daher, noch mehr Beobachtungen für den bezeichneten Theil der Skale.

I. Beobachtungen k_r nach Taf. II Fig, 1.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
40		89.78	83.76	77.77	74.75	69.68	62.67	54.75
45			88.83	82.83	79.84	74.81	67.73	59.74
50				87.92	84.92	79.93	72.87	64.82
55					90.03	85.01	78.02	69.93
60						90.10	83.07	75.07
65							88.10	80.10
70								85.08
75								90.03

Mit Hülfe der allgemein entwickelten Formeln könnten die Verbesserungen hier nicht gefunden werden. Deshalb benutzen wir die durch die bisherige Rechnung bestimmbaren Fadenlängen. Sie ergeben sich aus dem Mittel der Differenzen der verbesserten unteren und oberen Enden. — Wenn diese gefunden, so ermitteln wir nach der Curve Fig. 2 Taf. II die Verbesserungen der in vorstehender Tabelle neu hinzugekommenen unteren Hauptpunkte 40°,45° etc., bis 75°, und setzen an diese verbesserten Enden die berechneten Fadenlängen an; alsdann ergiebt sich unmittelbar durch die Differenz der so erhaltenen und der beobachteten oberen Enden die Correktion der letzteren.

K. Berechnung der Fadenlängen.

Verbesserte Beobachtungen nach dem arithmetischen Mittel in Fig. 2 Taf. II.

Verbesserte untere Hauptpunkte.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
0.20	54.86	49.91	43.94	37.99	35.00	30.02	23.08	15.11
5.24	59.91	54.96	48.99	43.02	40.04	35.06	28.11	20.15
10.22	64.90	59.93	53.97	48.00	45.01	40.05	33.11	25.14
15.18	69.86	64.89	58.92	52.95	49.98	45.00	38.05	30.09
20.08	74.76	69.79	63.83	57.86	54.88	49.91	42.96	35.00
24.99	79.67	74.70	68.73	62.77	59.78	54.81	47.86	39.91
29.94	84.62	79.65	73.68	67.72	64.73	59.76	52.80	44.85
34.91	89.59	84.62	78.65	72.69	69.70	64.73	57.78	49.82

L. Differenz zwischen den verbesserten Beobachtungen und verbesserten unteren Hauptpunkten zur Bestimmung der Fadenlängen:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
	54.66	49.71	43.74	37.79	34.80	29.82	22.88	14.91
	67	72	75	78	80	82	87	91
	68	71	75	78	79	83	89	92
	68	71	74	77	80	82	87	91
	68	71	75	78	80	83	88	92
	68	71	74	78	79	82	87	92
	68	71	74	78	79	82	86	91
	68	71	74	78	79	82	87	91
Mittel:	54.68	49.71	43.74	37.78	34.80	29.82	22.87	14.91

M. Oberes Ende der berechneten Fäden, wenn diese von den verbesserten unteren Hauptpunkten ausgehend gedacht werden.

Verbesserte untere Hauptpunkte.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
39.91		89.62	83.65	77.69	74.71	69.73	62.78	54.82
44.93			88.67	82.71	79.73	74.75	67.80	59.84
50.00				87.78	84.80	79.82	72.87	64.91
55.07					89.87	84.89	77.94	69.98
60.10						89.92	82.97	75.01
65.09							87.96	80.00
70.04								84.95
74.95								89.86

N. = M − J. Verbesserungen der oberen Enden in $^1/_{1000}$ Grad, graphisch in Fig. 4 Taf. II.

		− 160	− 110	− 80	− 40	+ 50	+ 110	+ 70
			− 160	− 120	− 110	− 60	+ 70	+ 100
				− 140	− 120	− 110	——	+ 90
					− 160	− 120	− 80	+ 50
						− 180	− 100	− 60
							− 140	− 100
								− 130
								− 170

Die gefundenen Fadenlängen weichen, wie man sieht, genau im Verhältniss zu ihrer angenommenen Länge, von dieser letzteren ab. Statt eines Fadens M finden wir die Länge $M\,(1-\alpha) = 0.9942 \times M$. —

Die graphische Darstellung der gewonnenen Verbesserungen wurde in Fig. 4 eingetragen, und um die Zeichnung der Fig. 2 nicht zu verwirren, die Abscissenaxe um 10 Maasstheile verschoben gedacht. Die Werthe des Mittels in Fig. 2 wurden dann nach Fig. 4 übertragen, und punktirt verzeichnet. Die Abweichungen übersteigen an keiner Stelle 7 Tausendstel Grad, so dass im vorliegenden Falle keine grössere Genauigkeit erzielt werden kann. In der Praxis wird diese Rechnung wegen der Beobachtungsfehler, die im vorliegenden fingirten Beispiel gering sind, stets ausgeführt werden müssen.

6. Es erscheint nun weiter die Frage von besonderem Interesse, ob eine Verkürzung der Rechnung ermöglicht, und dieselbe Genauigkeit durch eine geringere Anzahl von Beobachtungen erreicht werden könne.

Ein Blick auf die theoretische Entwickelung lehrt, dass nach einigen Annäherungen ebenso schnell eine Uebereinstimmung der gefundenen Curve mit der ursprünglichen erzielt wird, solange nämlich blos die Hauptzüge der Correktionskurve ermittelt werden sollen. — Denn dann, wenn keine plötzlichen Aus- und Einbiegungen vorkommen, entspricht der Zug der freien Hand besser den wirklichen Verbesserungen als in dem Falle, wo grosse Unregelmässigkeiten im Thermometer statt haben. Durch das graphische Verfahren ebenso, wie durch irgend eine Rechnungs-Interpolationsmethode läuft man nämlich Gefahr, zwei weit von einander abstehende Ordinatenendpunkte in einfacher Weise zu verbinden, während möglicher Weise mehrere Maxima und Minima zwischen jenen beiden zu verbindenden Punkten liegen könnten. — Solch ein Beispiel, wo die Ausgangskurve stärkere Aus- und Einbiegungen zeigt, soll deshalb später ausgeführt werden. Versuchen wir zunächst dieselben Curve Fig. 1 Taf. II aufzusuchen, indem wir nur $^1/_4$ aller Beobachtungen auf Seite 28, d. h. nur 4 untere Hauptpunkte und 4 Fäden berücksichtigen, und zwar die Fäden I, III, V und VII von den Hauptpunkten 0, 10, 20 und 30 aus. Da eine ähnlich abgekürzte Rechnung im V. Abschnitt für ein wirkliches Thermometer mitgetheilt wird, so wird es hier genügen auf das Resultat zu verweisen. Die Fig. 5 Taf. II stellt die erste Annäherung dar, deren Mittelkurve einer zweiten Rechnung zu Grunde gelegt wurde.

Die zweiten Verbesserungen sind sehr klein, das Mittel derselben ist in Fig. 6 graphisch gewonnen, die Werthe des letzteren den Ordinaten der Fig. 5 hinzugefügt. Die punktirte Linie mit stehenden Kreuzen bezeichnet das Endresultat der zweiten Annäherung. Zum Vergleich mit dieser ist die vorhin gefundene Curve Fig. 2 parallel mit sich selbst in die Fig. 5 übertragen, und durch liegende Kreuze bezeichnet. Diese letztere durchschneidet jene über der Abscisse 54°.7, und wenn die übertragene Curve in dem früher angedeuteten Sinne um diesen Punkt gedreht wird, so findet eine fast vollkommene Coïncidenz statt an den Punkten, wo die zuletzt berechnete Curve genau bestimmt wurde. An anderen, so namentlich beim Maximum (Absc. 60°) findet eine Abweichung von $^1/_{100}$ Grad statt, eine noch grössere bei der Strecke 25—30°, wo der Zug der freien Hand durchaus eine Willkühr mitbringen musste. Nimmt man den Drehungscoëffizienten $\alpha = 0{,}0011$ an, so stimmen die oberen sowie namentlich auch die unteren Enden ganz genau überein. Abweichungen finden nur an den bezeichneten Stellen statt, wo eine grössere Genauigkeit wegen der geringen Zahl in Rechnung gebrachter Beobachtungen nicht zu erwarten war.

Ein brauchbares Resultat erhält man aber nur dann, wenn die Anzahl der Vertikal- und Horizontalreihen gleich gross. — Wenn man nur die ersten 4 Horizontalreihen und alle 8 Vertikalreihen in Rechnung nimmt, so ergeben die einzelnen Fäden Verbesserungen, wie sie Fig. 7 Taf. II graphisch verzeichnet sind. Die Rechnung, ganz der früheren analog, durfte hier fortgelassen werden. Ein graphisches Mittel zu nehmen, scheint nicht statthaft. —

7. Wie aus dem letzten Beispiele zu ersehen, wird oft in der Praxis eine geringe Anzahl von Beobachtungen genügen, wenn nur nicht starke und plötzliche Unregelmässigkeiten vorkommen. Letzteres kann man am Verlaufe der Zahlen, wie sie den einzelnen Fäden entsprechen, erkennen.

Das folgende Beispiel bezieht sich auf eine Fehlerkurve, wie sie in Fig. 1 Taf. III fingirt ist. Die Ordinaten sind wiederum nach dem kleineren Maassstabe gemessen, also die Fehler sehr bedeutend. Die Tabelle der $V_k + H_r - M_b$ ist aus der folgenden Zusammenstellung fortgelassen. —

Beobachtungen.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	H_r
0	44.62	41.66	38.10	35.42	32.52	29.47	24.84	21.71	18.10	14.40	30.084
5	50.73	47.21	43.11	40.23	37.66	34.94	31.01	27.85	23.22	19.30	35,526
10	55.18	52.25	47.68	44.55	41.59	38.84	35.36	32.45	28.33	23.69	39,992
15	59.36	56.56	52.94	49.66	46.27	43.23	30.43	36.90	33.12	29.06	44,653
20	65.55	62.06	58.04	55.46	52.57	49.16	44.86	41.89	38.28	34.70	50,257
25	70.44	67.51	63.08	59.89	57.03	54.43	50.32	46.83	42.77	39.02	55,132
30	74.98	71.84	67.89	64.76	61.30	58.30	54.79	51.83	47.24	43.14	59.607
35	79.12	76.60	72.98	69.87	66.91	63.67	59.30	56.51	52.88	48.36	64,620
40	84.61	81.58	77.98	75.63	72.62	69.56	65·54	62.05	58.03	54.52	70,212
45	90.24	87.15	82.69	79.87	77.25	74.84	70.67	67.74	63.37	59.12	75,294
V_k:	67,483	64,442	60,449	57,534	54,572	51,644	47,612	44,576	40,534	36,531	$52{,}5377 = M_b$

$H_r - M_b$	Verbesser. der unt. End. in $^1/_{1000}$ Grad.
— 22.454	+ 215
— 17.012	+ 637
— 12.546	+ 123
— 7.885	— 216
— 2.281	+ 388
+ 2.594	+ 263
+ 7.069	— 262
+ 12.082	— 249
+ 17.674	+ 343
+ 22.756	+ 425

Tabelle der Verbesserungen $\varphi k_r = V_k + H_r - M_b - k_r$ in $^1/_{1000}$ Graden.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
	+ 409	+ 328	— 105	— 340	— 402	— 280	+ 318	+ 412	— 20	— 323
	— 259	+ 220	+ 327	+ 292	— 100	— 308	— 410	— 286	+ 302	+ 219
	— 243	— 354	+ 223	+ 438	+ 436	+ 258	— 294	— 420	— 342	+ 295
	+ 238	— 3	— 376	— 11	+ 417	+ 529	+ 297	— 209	— 471	— 414
	— 348	+ 101	+ 128	— 207	— 279	+ 203	+ 471	+ 405	— 27	— 450
	— 363	— 474	— 37	+ 238	+ 136	— 192	— 114	+ 340	+ 358	+ 105
	— 428	— 329	— 372	— 157	+ 341	+ 413	— 109	— 185	+ 363	+ 460
	+ 445	— 76	— 449	— 254	— 256	+ 56	+ 394	+ 148	— 264	+ 253
	+ 547	+ 536	+ 143	— 422	— 374	— 242	— 254	+ 200	+ 178	— 315
	— 1	+ 48	+ 515	+ 420	+ 78	— 440	— 302	— 408	— 80	+ 167
Controlle.	+ 1639	+ 1233	+ 1336	+ 1388	+ 1408	+ 1459	+ 1480	+ 1505	+ 1201	+ 1499
	— 1642	— 1236	— 1339	— 1391	— 1411	— 1462	— 1483	— 1508	— 1204	— 1502

Wenn man 10 Fäden von 10 unteren Hauptpunkten aus beobachtet, so wird der praktische Vortheil erreicht, dass sämmtliche Divisionen erspart bleiben.

Die Correktionen und deren graphisches Mittel findet man in Fig. 2 Taf. III (die Abscisse ist wiederum der Deutlichkeit wegen um 10 Abtheilungen herabgerückt). In derselben Tafel findet man in hundertstel Graden die Differenzen der Ordinaten dargestellt. Unverkennbar nimmt diese Differenz vom unteren nach dem oberen Ende der Skale zu, ein Zeichen dafür, dass die gefundene gegen die ursprüngliche Curve gedreht erscheint. Begnügen wir uns im vorliegenden Falle mit dieser ersten Annäherung, so bemerken wir schon eine vortreffliche, in den meisten praktischen Fällen völlig genügende Uebereinstimmung. Bloss die bei 74° der Skale vorkommende starke und plötzliche Schwankung — und auf den Einfluss solcher kam es uns hauptsächlich bei diesem Beispiele an — zeigt zu kleine Ordinatendifferenzen, d. h. die von uns gefundene Curve steht zu hoch. Man überzeugt sich bald davon, dass für diese starke Biegung selbst die 10 Reihen von Beobachtungen nicht genügen konnten; wir hätten noch die Hauptpunkte 2, 5; 7, 5 u. s. w. hinzunehmen müssen, damit der freie Zug der Curven des fünften und zweiten Fadens an dieser Stelle (Abscisse 75°) eine genaue Bestimmung fände. Ohne Berücksichtigung dieser genannten beiden Züge hätten wir schon die genauere mit Strichen ausgezogene Curve erhalten. —

8. Vollends ungenügend wird aber die graphische, — und auch jede andere Interpolationsmethode —, wenn wir im vorliegenden Falle von 10 zu 10 Grad, statt von 5 zu 5, bei den unteren Hauptpunkten fortschreiten. Man combinire die von den unteren Hauptpunkten 0, 10, 20, 30, 40 ausgehenden Fäden I, III, V, VII und IX, so erhält man Verbesserungen, wie sie graphisch in Fig. 3 Taf. III eingetragen sind. Die Rechnung ist der früheren analog.

Jeder Verbesserung ist die dem angehörigen Faden entsprechende Zahl beigesetzt; wollte man die durch gleiche Zahlen bezeichneten Punkte, wie bisher geschah, durch Linien verbinden, so würden die Bestimmungen der einzelnen Fäden sehr bedeutend von einander abweichen. So beispielsweise die Fäden 2 und 3, die über der Abscisse 70° sich kreuzweise durchschneiden würden. — Einfacher erscheint es im vorliegenden Falle unmittelbar ein allen einzelnen Beobachtungen sich möglichst genau anschliessendes Mittel zu ziehen, wie in der Fig. 3 geschehen ist. Vollends mangelhaft erscheint die Bestimmung der unteren Enden: zwar sind die Verbesserungen von 0 und 10 Grad gut, aber das gesammte Maximum zwischen diesen Skalenpunkten geht verloren. Man müsste voraussetzen, das Thermometer habe von 0 bis 10 Grad gleichmässiges Normalkaliber, und möglicherweise besteht dort eine gewaltige Gestaltsänderung. Eben dasselbe bezieht sich auf die Strecke von 10 bis 20 Grad.

Wir erkennen aus dieser Erörterung, dass die Darstellung der Correktionskurve um so genauer sein wird, je grösser die Anzahl der Fäden, und je grösser die der unteren Haupt-

punkte der Skale, an welche jene angesetzt werden. — Wir hatten früher ausgesprochen, dass eine Hauptbedingung für das Gelingen der Untersuchung die gleiche Anzahl der Vertikal- und Horizontalreihen sei. — Der vorliegende Fall scheint dieser Behauptung zuwider; denn wenn man von den Seiten 33 mitgetheilten Beobachtungen nur die fünf ersten Horizontal- und alle zehn Vertikalreihen berücksichtigt, so erhält man Verbesserungen, wie sie Fig. 7 Taf. III graphisch eingetragen sind. (Die Rechnung mag hier wiederum fortbleiben.) — Ein Mittel würde sich vollkommen gut nehmen lassen, und dasselbe erscheint kaum weniger gut als das der ausführlichen Rechnung, jedenfalls besser als das der abgekürzten mit gleicher Anzahl Vertikal- und Horizontalreihen. Fragen wir uns, weshalb im vorliegenden Falle keine grösseren Abweichungen sichtbar werden, ähnlich wie vorhin bei der Fig. 7 Taf. II, da doch hier eben so wie dort, der Nenner von α sehr verschieden für identische Skalenorte werden muss? Der Grund leuchtet ein aus der Gleichung (11). Der Zähler von α wird für eine Verbesserungskurve der vorliegenden Art überall nahezu $= 0$, das ganze zu φk_r hinzukommende Glied sehr klein, und die enger von 5 zu 5 Grad bei einanderliegenden Verbesserungen bestimmen ziemlich genau den Verlauf der Curven. In der Praxis weiss man aber niemals vorher, wie die Fehler geordnet sind. Man wird es deshalb auch nie wagen dürfen, eine ungleiche Anzahl von Reihen in Rechnung zu ziehen.

9. Bessel empfiehlt ferner, nachdem man die Correktionstafel entworfen, noch eine Beobachtungsreihe anzustellen, indem man die Fäden an die oberen Hauptpunkte des Thermometers ansetzt, und die unteren Enden in der früher angegebenen Art notirt.

Da die Arbeit durch dieses Verfahren ums Doppelte vergrössert wird, so scheint es nothwendig, diesen Vorschlag einer näheren Prüfung zu unterziehen.

Wir kehren zu der auf Taf. II, Fig. 1 fingirten Curve, die sich auf Taf. IV reproducirt findet, wieder zurück, entwerfen von Neuem eine Beobachtungstabelle, deren Berechnung nur verkürzt mitgetheilt wird. Alle Fäden sind an die oberen Enden angesetzt. Man bemerke, dass jetzt die beobachtete Curve in der früher als ungünstig bezeichneten Lage sich befindet; daher die Abweichungen beim Minimum sehr gross werden. Doch bringen die ersten und letzten Fäden eine Ausgleichung zu Stande.

Beobachtungen k_r nach der Curve Fig. 1 Taf. IV.

Obere Hauptpunkte	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	$m.H_r$	H_r
90	35.24	40.22	46.14	52.02	54.97	59,90	66.89	74.97	430.35	53.794
85	30.26	35.26	41.23	47.14	50.08	54.99	61.91	69.92	390.79	48 849
80	25.23	30.25	36.25	42.21	45.17	50.07	56.95	64.90	351.03	43.879
75	20.19	25.25	31.27	37.26	40.25	45.18	52.05	59.93	311.38	38.920
70	15.19	20.26	26.32	32.34	35.34	40.32	47.21	55.07	272.05	34.006
65	10.19	15.20	21.27	27.35	30.35	35.35	42.32	50.17	232.20	29.025
60	5.19	10.17	16.20	22.29	25.32	30.34	37.34	45.25	192.10	24.012
55	0.18	5.12	11.10	17.13	20.19	25.25	32.27	40.25	151.49	18.936
	141.67	181.73	229.78	277,74	301.67	341.40	396.94	460.46	2331.39	
	17.709	22.715	28.722	34.717	37.709	42.675	49.617	57.557	291.421	
									36.428 = M_b	

Verbesserungen der Beobachtungen $= V_k + H_r - M_b - k_r$ graphisch eingetragen auf Taf. IV Fig. 2.

Verbesserungen der oberen Hauptpunkte	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
— 48	— 165	— 139	— 52	+ 63	+ 105	+ 141	+ 93	— 43
+ 7	— 130	— 124	— 87	— 2	+ 50	+ 106	+ 128	+ 58
+ 37	— 70	— 84	— 77	— 42	— 10	+ 56	+ 118	+ 108
+ 78	+ 11	— 43	— 56	— 51	— 49	— 13	+ 59	+ 119
+ 164	+ 97	+ 33	— 20	— 45	— 53	— 67	— 15	+ 65
+ 183	+ 116	+ 112	+ 49	— 36	— 44	— 78	— 106	— 16
+ 170	+ 103	+ 129	+ 106	+ 11	— 27	— 81	— 139	— 109
+ 94	+ 37	+ 113	+ 130	+ 95	+ 27	— 67	— 145	— 185
Controlle.	+ 364 — 365	+ 387 — 390	+ 285 — 292	+ 169 — 176	+ 182 — 183	+ 303 — 306	+ 398 — 405	+ 350 — 353

Das erste graphische Mittel (Fig. 2 Taf. IV) nehmen wir als Grundlage der zweiten Annäherung. Es folge hier bloss das Resultat der Rechnung.

Zweite Verbesserungen $V'_k + H'_r - M'_b - k'_r$, eingetragen auf Taf. IV Fig. 3.

	— 17	— 7	— 16	+ 6	+ 3	+ 13	+ 9	+ 8
	— 20	— 6	+ 2	— 3	——	+ 11	+ 11	+ 5
	— 20	— 13	— 3	+ 8	+ 4	+ 4	+ 11	+ 10
	— 18	— 13	— 7	+ 10	+ 4	+ 5	+ 7	+ 11
	— 1	— 10	— 2	+ 1	——	+ 7	+ 3	+ 3
	+ 11	+ 6	+ 10	— 11	— 8	+ 3	— 7	— 5
	+ 29	+ 22	+ 1	— 6	— 13	— 11	— 10	— 8
	+ 41	+ 20	+ 15	— 3	+ 13	— 27	— 26	— 23
Controlle.	+ 81 — 76	+ 48 — 49	+ 28 — 28	+ 25 — 23	+ 24 — 21	+ 43 — 38	+ 41 — 43	+ 37 — 36

Die Correctionen sind aus dem vorhin erwähnten Grunde bedeutender als diejenigen, welche wir früher bei der Berechnung der Taf. II erhielten; eine dritte Annäherung dürfte desshalb wohl noch von Nutzen sein. Indess kommt es hier nur auf die Beziehung dieser Beobachtungen zu denen der Tab. II an. Bis auf hundertstel Grad genau ist übrigens die Uebereinstimmung auch im vorliegenden Fall. Nimmt man nämlich den Drehungspunkt $d = 30^0$ der Skale, und den Drehungscoefficienten $\alpha = 0{,}003$, so ergiebt die Rechnung, die hier mitzutheilen überflüssig erscheint, eine Curve, deren Verlauf durch die Kreuze auf Taf. IV, neben der fingirten Curve angedeutet ist. Eine bessere Uebereinstimmung der oberen Enden hätte eine dritte Annäherung gebracht.

Fragen wir uns aber, ob es rathsam erscheint, das Mittel zu nehmen, aus der hier gewonnenen Curve und jener (Taf. II), so kann dagegen nichts eingewandt werden, insofern das Endresultat nicht weniger genügen wird, als eine jede einzelne für sich berechnete Curve. Dieses verdient aber jedenfalls ausdrücklich bemerkt zu werden, da die absoluten Werthe der Verbesserungen jetzt ganz andere sind, als zuvor, denn der mittlere Fehler liegt jetzt wo anders, bezieht sich auch nicht mehr auf dieselbe Skalenstrecke, wie früher. Es müsste sich ohne theoretische Grundlage Jedermann scheuen, die an identischen Skalenorten weit von einander entfernten Verbesserungswerthe zu einem arithmetischen Mittel zu vereinigen. Allein die Methode gestattet solches dennoch. Gab uns die erste Rechnung, wenn φk_r eine nach irgend welchem Maassstabe gemessene Correktion vorstellt,

$$\varphi' k_r = \varphi k_r + \alpha (k_r + \varphi k_r - (M'_b + M'\varphi)) - M'\varphi$$

die zweite $$\varphi'' k_r = \varphi k_r + \beta (k_r + \varphi k_r - (M''_b + M''\varphi)) - M''\varphi$$

so wird das Mittel beider ergeben die Verbesserung

$$\frac{\varphi' k_r + \varphi'' k_r}{2} = \varphi k_r + \frac{\alpha + \beta}{2} \left\{ k_r + \varphi k_r - \frac{2(\alpha(M'_b + M'\varphi) + \beta(M''_b + M''\varphi))}{\alpha + \beta} \right\} - (M'\varphi + M''\varphi)$$

Der Drehungspunkt und Drehungscoeffizient sind andere, aber die neue Curve wird vollkommen den Anforderungen des Problems genügen, wie vorstehende Gleichung beweist.

Ein erheblicher Vortheil scheint aber keineswegs aus diesem doppeltem Verfahren zu erwachsen, und zwar desshalb nicht, weil die Abweichungen der gefundenen Curven von der fingirten keineswegs in beiden Fällen entgegengesetzten Zeichens zu sein brauchen. Namentlich, wenn man erwartet, dass in Folge der ersten Annäherungen beider Rechnungen die Fehler an den obersten und untersten Skalenpunkten sich ausgleichen werden, so täuscht man sich, da dieses letztere nicht der Fall zu sein braucht, denn das Zeichen dieser Fehler hängt von der zufälligen Concavität oder Convexität am Anfang und Ende der Curve ab. Weit besser ist es, eine zweite Annäherung einer und derselben Ausgangstabelle zu berechnen, als ein arithmetisches Mittel aus zwei ersten Annäherungen zweier von entgegengesetzten Enden aus angestellten Beobachtungstabellen herzustellen [1]). Wenn aber bisher jemals Jemand ersteres wirklich versucht, so zweifle ich nicht daran, dass er die ganze Methode, des obenerwähnten Umstandes wegen verworfen hätte. Wir erkennen jetzt aber deutlich, dass die absolute Verschiedenheit der Verbesserungen keinen Mangel der Methode beschliesst.

V. Kalibrirung eines Geisslerschen Normalthermometers.

1. Gehen wir jetzt über zur Behandlung wirklicher Thermometer, so dürfte es zweckmässig erscheinen, zuerst ein Beispiel zu berechnen, dann die Art der Beobachtung, und das Verfahren bei der Abtrennung der Fäden, und was damit zusammenhängt, zu erörtern.

Das nachfolgend untersuchte Normalthermometer war in Celsiusgrade getheilt, die Zehntel waren noch bezeichnet, und die Hundertstel wurden mit Hülfe einer Loupe geschätzt.

Wie bei den meisten sorgfältig gearbeiteten Thermometern, so gelang es auch beim vorliegenden leicht, Quecksilberfäden von gewünschter Länge abzutrennen. Eine flüchtige Ueberlegung ergiebt die nothwendige Einrichtung aller Fadenlängen und Beobachtungen, mittelst welcher eine vollständig ausgeführte Tabelle mit 10 Fäden von 10 unteren Hauptpunkten aus möglich wurde.

Nothwendig ist es, wie bereits früher erörtert, dass die oberen Enden der kürzesten Fäden solche Skalenpunkte erreichen, die im Bereich der unteren Ausgangspunkte liegen. In der folgenden Beobachtungstabelle findet solches für die Strecke 20 bis 35 Grad statt.

2. Von allen Beobachtungen werden zunächst nur die vollkommen ausgefüllten Horizontalreihen der Rechnung unterzogen. Diese letztere ist stets bis auf die 3. Decimale ausgeführt, damit in den Hundertsteln keine Unsicherheit entstände.

Berechnung des Geisslerschen Normalthermometers.

Beobachtungen k_r

Unt. H. P.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	H_r
— 10	55.63	49.76	42.96	39.66	35.99	31.68	28.33	25.43	21.30	17.66	348.40
— 5	60.70	54.79	47.95	44.65	40.98	36.66	33.32	30.42	26.26	22.67	398.40
0	65.70	59.78	52.92	49.62	45.94	41.61	38.27	35.36	31.22	27.59	448.01
5	70.74	64.80	57.91	54.59	50.89	46.58	43.24	40.31	36.16	32.56	497.78
10	75.80	69.86	62.95	59.62	55.89	51.56	48.20	45.29	41.15	37.52	547.84
15	80.75	74.92	67.98	64.65	60.92	56.57	53.19	50.27	46.13	42.49	597.87
20	85.75	79.91	73.06	69.72	65.98	61.59	58.23	55.29	51.10	47.48	648.11
25	90.76	84.94	78.12	74.85	71.08	66.70	63.31	60.36	56.18	52.53	698.83
30	95.80	89.91	83.12	79.84	76.13	71.79	68.40	65.42	61.23	57.56	749.20
35	100.82	94.95	88.10	84.81	81.12	76.84	73.49	70.52	66.28	62.61	799.54
V_k:	78.245	72.362	65.507	62,201	58.492	54.158	50.798	47.867	43.701	40.067	5733.98 57.340=M_b

1) Man vergleiche nur thatsächlich die ersten Annäherungen der Taf. II und IV, und man wird erkennen, dass das Mittel der Correktionen bei weitem nicht die Genauigkeit jeder einzelnen zweiten Annäherung erreicht.

Tabelle der $V_k + H_r - M_b$

$H_r - M_b$	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	Verbesser. der unt. Hauptpkt. in $^1/_{1000}$ Grad.
— 22.500	55.745	49.862	43.007	39.701	35.992	31.658	28.298	25.367	21.201	17.567	— 136
— 17.500	60.745	54.862	48.007	44.701	40.992	36.658	33.298	30.367	26.201	22.567	— 136
— 12.539	65.706	59.823	52.968	49.662	45.953	41.619	38.259	35.328	31.162	27.528	— 175
— 7.562	70.683	64.800	57.945	54.639	50.930	46.596	43.236	40.305	36.139	32.505	— 198
— 2.556	75.689	69.806	62.951	59.645	55.936	51.602	48.242	45.311	41.145	37.511	— 192
+ 2.447	80,692	74.809	67.954	64.648	60.939	56.605	53.245	50.314	46.148	42.514	— 189
+ 7.471	85.716	79.833	72.978	69.672	65.963	61.629	58.269	55.338	51.172	47.538	— 165
+ 12.543	90.788	84.905	78.050	74.744	71.035	66.701	63.341	60.410	56.244	52.610	— 93
+ 17.580	95.825	89.942	83.087	79.781	76.072	71.738	68.378	65.447	61.281	57.647	— 56
+ 22.614	100.859	94.976	88.121	84.815	81.106	76.772	73.412	70.481	66.315	62.681	— 22

Erste Verbesserungen $\varphi k_r = V_k + H_r - M_b - k_r$ in $^1/_{1000}$ Grad graphisch eingetragen auf Taf. V. Fig. 1.

	+ 115	+ 102	+ 47	+ 41	+ 2	— 22	— 32	— 63	— 99	— 93
	+ 45	+ 72	+ 57	+ 51	+ 12	— 2	— 22	— 53	— 59	— 103
	+ 6	+ 43	+ 48	+ 42	+ 13	+ 9	— 11	— 32	— 58	— 62
	— 57	—	+ 35	+ 49	+ 40	+ 16	— 4	— 5	— 21	— 55
	— 111	— 54	+ 1	+ 25	+ 46	+ 42	+ 42	+ 21	— 5	— 9
	— 58	— 111	— 26	— 2	+ 19	+ 35	+ 55	+ 44	+ 18	+ 24
	— 34	— 77	— 82	— 48	— 17	+ 39	+ 39	+ 48	+ 72	+ 58
	+ 28	— 35	— 70	— 106	— 45	+ 1	+ 31	+ 50	+ 64	+ 80
	+ 25	+ 32	— 33	— 59	— 58	— 52	— 22	+ 27	+ 51	+ 87
	+ 39	+ 26	+ 21	+ 5	— 14	— 68	— 78	— 39	+ 35	+ 71
Controlle	+ 258	+ 275	+ 209	+ 213	+ 234	+ 142	+ 167	+ 190	+ 240	+ 320
	— 260	— 277	— 211	— 215	— 234	— 144	— 169	— 192	— 242	— 322

Die auf diese Weise gewonnenen ersten Verbesserungen sind graphisch in Fig. 1 Taf. V eingetragen, und das arithmetische Mittel aus allen einem jeden Grade der Abscisse entsprechenden Ordinaten gebildet. Der Maassstab für die letzteren ist ein sehr grosser. Jede 2 Linien lange Strecke bezeichnet nur 0,01 Grad. Das vorliegende Thermometer erfordert mithin keine grösseren Correktionen als 0,2 Grad. Die ersten Verbesserungen der Fäden weichen von der Mittelkurve um höchstens 0,056 Grad ab; so z. B. die Correktion der ersten Beobachtung des ersten Fadens. —

3. Versuchen wir die ursprünglichen Beobachtungen nach der gewonnenen Curve zu verbessern, so erhalten wir eine zweite Annäherung.

Zweite Annäherung.

Verbesserte Beobachtungen k'_r nach dem graphischen Mittel auf Taf. V Fig. 1.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	Verbesserte H'_r
	55.690	49.811	42.977	39.661	35.973	31.636	28.276	25.353	21 182	17.524	34,8083
	738	851	989	674	988	646	287	373	192	562	39,8300
	702	825	981	671	968	622	265	339	176	531	44,8080
	686	809	963	650	947	612	259	314	145	521	49,7906
	707	819	972	665	949	619	242	316	160	511	54,7960
	704	826	961	660	957	627	251	323	159	506	59,7974
	726	855	976	678	980	623	282	350	158	517	64,8145
	790	913	042	756	023	694	331	402	238	590	69,8779
	825	935	086	784	038	723	374	427	265	614	74,9071
	859	976	104	783	076	753	403	469	278	637	79,9338
	782.427	723.620	655.051	621.982	584.899	541.555	507.970	478.666	436.953	400.513	5733.636
Verbess. V'_k	78.243	72.362	65.505	62.198	58.490	54.155	50.797	47.867	43.695	40.051	**57.336** $= M'_b$

Verbesserte $V'_k + H'_r - M'_b$

Verbesserte $H_r - M_b$	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	Verbesser. der unt. H. P. in $^1/_{1000}$ Grad.
— 22.528	55.715	49.834	42.977	39.670	35.962	31.627	28.269	25.339	21.167	17.523	— 151
— 17.506	737	856	999	692	984	649	291	361	189	545	— 129
— 12.528	715	834	977	670	962	627	269	339	167	523	— 151
— 7.546	697	816	959	652	944	609	251	321	149	505	— 169
— 2.540	703	822	965	658	950	615	257	327	155	511	— 163
+ 2.461	704	823	966	659	951	616	258	328	156	512	— 162
+ 7.478	721	840	983	676	968	633	275	345	173	529	— 145
+ 12.542	785	904	047	740	032	697	339	409	237	593	— 81
+ 17.571	814	933	076	769	061	726	368	438	266	622	— 52
+ 22.598	841	960	103	796	088	753	395	465	293	649	— 25

Zweite Verbesserungen $= V'_k + H'_r - M'_b - k'_r$ in $^1/_{1000}$ Grad, eingetragen auf Taf. V Fig. 3.

	+ 25	+ 23	——	+ 9	— 11	— 9	— 7	— 14	— 15	— 1
	— 1	+ 5	+ 10	+ 18	— 4	+ 3	+ 4	— 12	— 3	— 17
	+ 13	+ 9	— 4	— 1	— 6	+ 5	+ 4	——	— 9	— 8
	+ 11	+ 7	— 4	+ 2	— 3	— 3	— 8	+ 7	+ 4	— 16
	— 4	+ 3	— 7	— 7	+ 1	— 4	+ 15	+ 11	— 5	——
	——	— 3	+ 5	— 1	— 6	— 11	+ 7	+ 5	— 3	+ 6
	— 5	— 15	+ 7	— 2	— 12	+ 10	— 7	— 5	+ 15	+ 12
	— 5	— 9	+ 5	— 16	+ 9	+ 3	+ 8	+ 7	— 1	+ 3
	— 11	— 2	— 10	— 15	+ 23	+ 3	— 6	+ 11	+ 1	+ 8
	— 18	— 16	— 1	+ 13	+ 12	——	— 8	— 4	+ 15	+ 12
Controlle.	+ 49	+ 47	+ 27	+ 42	+ 45	+ 24	+ 38	+ 41	+ 35	+ 41
	— 44	— 45	— 26	— 42	— 42	— 27	— 36	— 35	— 36	— 42

Die grösste hier erhaltene Verbesserung beträgt nur noch 0,025 Grad. Versuchen wir ein Mittel zu bestimmen, wie solches in Fig. 2 Taf. V geschehen, so erhalten wir nur an den Enden der Skale Werthe, welche $^1/_{100}$ Grad übersteigen. Die meisten Correktionen widersprechen einander der Art, dass sie sich gegenseitig an ein und derselben Stelle der Abscisse ausgleichen.

Bringen wir das hier gewonnene Mittel in Berücksichtigung, so erhalten wir in Fig. 1 die durch stehende Kreuze, bezeichnete, punktirt ausgeführte Curve. Wirklich geändert sind die unteren Enden der Skale, und namentlich um dieser willen musste die zweite Rechnung ausgeführt werden.

4. Bleiben wir bei diesem Resultat stehen, da eine dritte Annäherung voraussichtlich keine bemerkbare Aenderung mehr geben würde, und benutzen die mit kürzeren Fäden angestellten, bisher noch nicht verwertheten Beobachtungen, um eine genauere Bestimmung der oberen Skalentheile zu erhalten. Hier nämlich sind wenig Beobachtungen bisher benutzt, und wir können weniger Zuversicht zu der Curve haben, weil die Beobachtungsfehler nicht haben ausgeglichen werden können. — In der früher beschriebenen Weise ermitteln wir zunächst die Fadenlängen, indem wir die Mittel aus allen zusammengehörigen Differenzen der unteren und oberen Enden nehmen.

Zweimal verbesserte Beobachtungen nach Taf. V (....+....+) in Fig. 1.

Verbess. untere Enden.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	m . H_r	Dritt. Verbess. der unt. End.
— 10.151	55.690	49.816	42.979	39.662	35.971	31.632	28.269	25.348	21.170	17.506	348.043	— 153
— 5.129	741	851	993	678	989	646	282	368	188	551	398.287	— 129
— 0.151	704	826	984	676	972	623	267	337	171	526	448.086	— 149
+ 4.831	686	813	964	651	951	616	261	316	144	517	497.919	— 166
+ 9.837	708	822	978	666	949	623	248	320	161	511	547.986	— 159
+14.838	699	828	964	665	960	627	253	328	164	507	597.995	— 158
+19.858	713	852	980	584	983	625	282	350	162	522	648.153	— 142
+24.912	786	910	041	758	026	693	335	412	238	594	698.793	— 78
+29.946	812	931	083	780	039	726	378	429	267	616	749.061	— 51
+34.974	842	966	103	780	070	754	406	471	280	639	799.311	— 25

Bestimmung der Fadenlängen: Differenz der verbesserten oberen und unteren Enden.

	65.841	59.967	53.130	49.813	46.122	41.783	38.420	35.499	31.321	27.657
	870	980	122	807	118	775	411	497	317	680
	855	977	135	827	123	774	418	488	322	677
	855	982	133	820	120	785	430	485	313	686
	871	985	141	819	112	786	411	483	324	674
	861	990	126	827	122	789	417	490	326	669
	855	994	122	826	127	767	424	492	304	664
	874	998	129	846	114	781	423	500	326	684
	866	985	137	834	093	780	432	483	321	670
	868	992	129	806	096	780	432	497	306	665
Fadenlängen:	65.862	59.985	53.130	49.822	46.115	41.780	38.422	35.491	31.318	27.673

5. Die unter der Ueberschrift m . H_r verzeichneten Summen aller Beobachtungen beweisen, dass auch die Correktionen der unteren Enden sich um kein halbes Hundertstel eines Grades bei der dritten Annäherung ändern würden. Denn es war H_r

bei der zweiten	bei der dritten	Differenz in $^1/_{1000}$ Grad
34.808	34.804	— 4
39.830	39.829	— 1
44.808	44.809	+ 1
49.791	49.792	+ 1
54.796	54.799	+ 3
59.797	59.799	+ 2
64.814	64.815	+ 1
69.878	69.879	+ 1
74.907	74.906	— 1
79.934	79.931	— 3

Wie man aus obiger Tabelle sieht, weichen die einzeln erhaltenen Fadenlängen vom Mittel um höchstens 0,02 Grad ab, ein Fehler der bei der vorliegenden Art der Beobachtung begangen werden konnte.

6. Die zuletzt erhaltenen Fadenlängen benutzen wir, um die noch übrigen am Anfang der folgenden Tabelle verzeichneten Beobachtungen zu verwerthen. Es folgen diesen die berechneten oberen Enden, die man erhält, wenn die Fäden an die höher gelegenen nunmehr verbesserten unteren Enden angesetzt werden, und endlich die Verbesserungen.

Beobachtungen der oberen Enden:

Unverbess. untere Enden.		II.	III.	IV.	V	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
40		99.99	93.14	89.83	86.13	81.87	78.51	75.60	71.39	67.70
45			98.16	94.84	91.11	86.85	83.50	80.59	76.42	72.79
50				99.86	96.16	91.84	88.51	85.59	81.44	77.82
55					101.16	96.83	93.47	90.56	86.39	82.79
60						101.82	98.47	95.52	91.32	87.73
65								100.51	96.29	92.68
70									101.24	97.62
Zweimal verbess. unt. Enden		Berechnete obere Enden, durch Addition der Fadenlängen an die verbesserten unteren Enden.								
40.004		99.989	93.134	89.826	86.119	81.784	78.426	75.495	71.322	67.677
45.029			93.159	94.851	91.144	86.809	83.451	80.520	76.347	72.702
50.058				99.880	96.173	91.838	88.480	85.549	81.376	77.731
55.061					101.176	96.841	93.483	90.552	86.379	82.734
60.045						101.825	98.467	95.536	91.363	87.718
65.011								100.502	96.329	92.684
69.958									101.276	97.631

Differenzen der beobachteten und berechneten oberen Enden d. h. Correktionen in $^1/_{1000}$ Grad graphisch eingetragen auf Taf. V Fig. 3.

		— 1	— 6	— 4	— 11	— 86	— 84	— 105	— 68	— 23
			— 1	+ 11	+ 34	— 41	— 49	— 70	— 73	— 88
				+ 20	+ 13	— 2	— 30	— 41	— 64	— 89
					+ 16	+ 11	+ 13	— 8	— 11	— 56
						+ 5	— 3	+ 16	+ 43	— 12
								— 8	+ 39	+ 4
									+ 36	+ 11

Die graphische Zeichnung Fig. 3 ergab ein Mittel, welches durch blosse Punkte angedeutet, in die Fig. 2 übertragen wurde. Die Abweichung von der vorhin erhaltenen Mittelkurve beträgt noch nicht $^2/_{100}$ Grad, während die End- und Anfangspunkte fast ganz genau übereinstimmen. Berücksichtigen wir die letzt erhaltenen Verbesserungen der oberen und auch noch die dritte Annäherung der unteren Enden für sämmtliche Beobachtungen und suchen von neuem die Fadenlängen; eine Rechnung, die für die Praxis wohl zu empfehlen ist, um möglichst genau eine Tabelle der Beobachtungsfehler herzustellen. — Die ganzen Grade sind fortgelassen.

Verbesserte Beobachtungen.

55.689	49.817	42.979	39.662	35.971	31.632	28.269	25 348	21.170	17.508
740	851	993	678	989	646	282	368	188	551
703	826	984	676	972	623	267	337	171	526
686	813	964	651	951	616	261	316	144	517
707	822	975	666	949	623	248	320	161	511
692	828	964	665	960	627	253	328	164	507
719	844	980	684	983	625	282	350	162	522
777	903	038	756	026	693	335	412	238	594
814	922	075	774	048	726	378	429	267	616
842	965	095	773	064	750	406	471	280	639
	008	159	842	103	817	432	507	329	686
		173	855	129	829	457	532	329	711
			877	173	860	510	559	387	737
				183	842	488	577	364	745
					850	483	534	340	721
							530	302	699
								265	638

Verbesser. untere Enden	Differenz der oberen und unteren Enden.									
— 10.153	65.842	59.970	53.132	49.815	46.124	41.785	38.422	35.501	31.323	27.661
— 5.129	869	980	122	807	118	775	411	497	317	680
— 0.149	852	975	133	825	121	772	416	486	320	675
+ 4.834	852	979	130	817	117	782	427	482	310	683
+ 9.841	866	981	134	825	108	782	407	479	320	670
+ 14.842	850	986	122	823	118	785	411	486	322	665
+ 19.858	861	986	122	826	125	767	424	492	304	664
+ 24.918	859	985	120	838	108	775	417	494	320	676
+ 29.949	865	973	126	825	099	777	429	480	318	667
+ 34.975	867	990	120	798	089	775	431	496	305	664
+ 40.004		004	155	838	099	813	428	503	325	682
45.029			144	826	100	800	428	503	300	682
50.058				819	117	802	452	501	329	679
55.061					122	781	427	516	303	684
60.045						805	438	489	295	676
65.011								519	291	688
69.958									307	680
Mittel	65.858	59.983	53.130	49.822	46.112	41.785	38.424	35.495	31.312	27.675

Beobachtungsfehler in $^1/_{1000}$ Grad.

— 16	— 13	+ 2	— 7	+ 12	— —	— 2	+ 16	+ 11	— 14
+ 11	— 3	— 8	— 15	+ 6	— 10	— 13	+ 2	+ 5	+ 5
— 6	— 8	+ 3	+ 3	+ 9	— 13	— 8	— 9	+ 8	— —
— 6	— 4	— —	— 5	+ 5	— 3	+ 3	— 13	— 2	+ 8
+ 8	— 2	+ 4	+ 3	— 4	— 3	— 17	— 16	+ 8	— 5
— 8	+ 3	— 8	+ 1	+ 6	— —	— 13	— 9	+ 10	— 10
+ 3	+ 3	— 8	+ 4	+ 13	— 17	— —	— 3	— 8	— 11
+ 1	+ 2	— 10	+ 16	— 4	— 10	— 7	— 1	+ 8	+ 1
+ 7	— 10	— 4	+ 3	— 13	— 8	+ 5	— 15	+ 6	— 8
+ 9	+ 7	— 10	— 24	— 23	— 10	+ 7	+ 1	— 7	— 12
	+ 21	+ 25	+ 16	— 13	+ 28	+ 4	+ 8	+ 13	+ 7
		+ 14	+ 4	— 12	+ 15	+ 4	+ 8	— 12	+ 7
			— 3	+ 5	+ 17	+ 28	+ 6	+ 17	+ 4
				+ 10	— 4	+ 3	+ 21	— 9	+ 9
					+ 20	+ 14	— 6	— 21	+ 1
							+ 24	— 5	+ 13
									+ 5

7. Nach der Methode der kleinsten Quadrate wäre hier der mittlere Fehler
= 0,0105 Grad,
der wahrscheinliche Fehler = 0,0071 Grad.
In der That finden wir 66 Beobachtungsfehler von 0 bis 0,007 Grad.
73 Beobachtungsfehler grösser als 0,007 Grad.
Weiter aber giebt die Rechnung und Beobachtung folgendes Resultat.

Anzahl der Beobachtungen.

Berechnet		Gefunden	
Anzahl	kleiner als	Anzahl	von 0 bis inclusive
138.2	29.0		
138	28.3	139	28
132	21.2	133	21
114	14.2	117	14
96	11.6	97	11
81	8.5	82	8
75	7.8		
69	7.1	66	7
63	6.4	58	6
57	5.6		
50	4.9	51	5
44	4.2	42	4
37	3.5	31	3
30	2.8		
22	2.1	17	2
15	1.4	10	1
7	0.7		
0	0.0	5	0

Es liesse sich gegen diese Art Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf den vorliegenden Fall der Einwand erheben, dass den einzelnen Grössen der gewonnenen Correktionskurve nicht ein und dasselbe Gewicht zukäme. Allerdings haben wir eine verschiedene Anzahl von Beobachtungen an den verschiedenen Theilen der Skale; diese aber einzeln zu berücksichtigen, scheint namentlich bei dem eingeschlagenen graphischen Verfahren kaum ausführbar. Wir nehmen desshalb ein durchschnittlich für alle Theile gleiches Gewicht an, und von diesem Gesichtspunkte aus darf ein Vergleich wohl ausgeführt werden. Die grössten Beobachtungsfehler erscheinen an dem obersten Ende der Skale, was auf den Umstand hinweist, dass wir vielleicht ein grösseres Gewicht zur Herstellung der endgültigen Kurve den nachträglich — durch Addition der Fadenlängen — bestimmten Verbesserungen, und dem Fig. 3 Taf. V gewonnenen Mittel hätten zuschreiben sollen. Indess übersteigt, wie vorliegende Tabelle zeigt, kein Beobachtungsfehler die berechnete äusserste Gränze, bei welcher noch ein ganzer Fehler begangen werden kann.

Noch auf andre Weise versuchte ich einen Werth für den wahrscheinlichen Fehler zu ermitteln. Mit ein und demselben Quecksilberfaden stellte ich an zwei verschiedenen Stellen des Thermometers von Neuem Messungen an, und zwar so, dass vor jeder Ablesung der Faden um ein weniges vor- oder zurückgestellt wurde.

Nachher wurden die Differenzen des oberen und unteren Endpunktes, und endlich die Abweichung jeder Beobachtung vom Mittel verzeichnet, wie solches in der hier folgenden Tabelle mit 31 Beobachtungen geschehen. Zur Herstellung der ersten Beobachtungstabelle (Seite 32) war das Verfahren dasselbe, wie es hier beschrieben, nur wurde dort für jede Stellung des Fadens eine einzige Beobachtung gemacht; die Abweichung des unteren Fadenendes vom Hauptpunkte, die höchstens $^1/_{10}$ Grad betrug, wurde dem beobachteten Skalenpunkte des oberen Endes hinzugefügt, so dass die niedergeschriebene Ablesung einer genauen Einstellung auf den unteren Hauptpunkt entsprach.

a. Ablesung der unteren Enden.	b. Ablesung der oberen Enden.	c. Differenz von a u. b Fadenlängen.	Beobachtungsfehler Abweichung vom Mittel.
10.03	41.79	31.76	— 0.003
9.97	41.71	31.74	+ 0.017
9.99	41.73	31.74	+ 0.017
10.07	41.82	31.75	+ 0.007
10.00	41.78	31.78	— 0.023
9.96	41.71	31.75	+ 0.007
9.98	41.73	31.75	+ 0.007
10.05	41.81	31.76	— 0.003
10.03	41.80	31.77	— 0.013
9.99	41.76	31.77	— 0.013
		Mittel 31.757	
		Daraus berechnet der wahrscheinliche Fehler = 0°.00904.	
		Der Faden um 10° verschoben.	
19.90	51.61	31.71	+ 0.017
19.99	51.71	72	+ 0.007
20.03	51.76	73	— 0.003
19.98	51.71	73	— 0.003
19.99	51.71	72	+ 0.007
20.04	51.77	73	— 0.003
20.06	51.78	72	+ 0.007
20.00	51.72	72	+ 0.007
19.96	51.69	73	— 0.003
20.09	51.81	72	+ 0.007
20.07	51.79	72	+ 0.007
19.95	51.69	74	— 0.013
20.03	51.76	73	— 0.003
20.03	51.76	73	— 0.003
20.11	51.84	73	— 0.003
20.00	51.73	73	— 0.003
20.02	51.74	72	+ 0.007
19.89	51.62	73	— 0.003
20.03	51.77	74	— 0.013
20.02	51.75	73	— 0.003
20.03	51.77	74	— 0.013
		Mittel 31° 727	
		Wahrscheinlicher Fehler 0°,00531.	

Im Mittel erhalten wir also durch unmittelbare Beobachtung für den wahrscheinlichen Fehler denselben Werth 0°,007, der sich vorhin als Resultat der Methode ergab. (Fassen wir sämmtliche 31 vorstehende Beobachtungen zusammen, was streng genommen nicht geschehen darf, so käme der wahrscheinliche Fehler 0,0061). — Demnach wäre bis auf $^1/_{100}$ Grad etwa im vorliegenden Falle das Kaliber genau bestimmt. Indess muss ausdrücklich bemerkt werden, dass eine grössere Genauigkeit sehr leicht erreicht werden kann, dadurch dass jeder Beobachtung in der ersten Tabelle drei oder mehr andere zu Grunde gelegt werden, ganz in der Art, wie wir es soeben ausgeführt. Nur darf hierbei nicht vergessen werden, dass, wenn auch die Ablesungsfehler dadurch bedeutend vermindert werden, ein jeder einzelne Faden um so viel längere Zeit beobachtet werden muss, und ein Einfluss der Temperaturschwankung vergrössert wird. Diesen Uebelstand vermindert man, wenn nach Ausführung einer Beobachtungsreihe mit einem Faden, man denselben wieder zurückführt, um sich an den Anfangs beobachteten Skalenpunkten zu überzeugen, dass die Länge nicht merklich verändert. —

8. Endlich habe ich noch das obere Ende der Röhre einer speciellen Rechnung unterworfen. Die hier folgende mag als Beispiel für den Fall dienen, wo man über eine sehr grosse Anzahl von Beobachtungen an einem langen Thermometer verfügt. Man kann dann nämlich Gruppen unterscheiden, eine jede mit einer gleichen Anzahl Horizontal- und Vertikalreihen. Man erhält dadurch besondere Correktionskurven für die bezüglichen Theile der Thermometerröhre, welche sämmtlich, im Allgemeinen, verschiedene Verbesserungen anzeigen. Dadurch

aber, dass in diesen verschiedenen Theilen gemeinsame Abscissenstücke vorkommen, kann eine jede Curve so gedreht werden, dass sie in der identischen Strecke mit der früher gefundenen Curve zusammenfällt.

Wir benutzen die von 40 bis 60 Grad auslaufenden letzten fünf Fäden, und verfahren ganz wie früher.

Beobachtungen k_r

	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.		H_r
40	81.87	78.51	75.60	71,39	67.70	375.07	75.014
45	86.85	83.50	80.59	76.42	72.79	400,15	80.030
50	91.84	88.51	85.59	81.44	77.82	425.20	85.040
55	96.83	93.47	90.56	86.39	82.79	450.04	90.008
60	101.82	98.47	95.52	91.32	87.73	474.86	94.972
	459.21	442.46	427.86	406.96	388.83	2125.32	425.064
V_k:	91.842	88.492	85.572	81.392	77.776		$85.013 = M_b$

$H_r - M_b$	$V_k + H_r - M_b$					
— 9.999	81.843	78.493	75.573	71.393	67.767	
— 4.983	859	509	589	409	783	
+ 0.027	869	519	599	419	793	
+ 4.995	837	487	567	387	761	
+ 9.959	801	451	531	351	725	

Erste Verbesserungen in $^1/_{1000}$ Grad, graphisch in Taf. V Fig. 4.

— 27	— 17	— 27	+ 3	+ 67	
+ 9	+ 9	— 1	— 11	— 7	
+ 29	+ 9	+ 9	— 21	— 27	
+ 7	+ 17	+ 7	— 3	— 29	
— 19	— 19	+ 11	+ 31	— 5	

Das Mittel der Verbesserungen ist punktirt in Fig. 4 Taf. V dargestellt, und dient als Grundlage der folgenden zweiten Annäherung.

Verbesserte Beobachtungen k'_r

							H'_r
	81.856	78.492	75.581	71.396	67.767	375.092	75.018
	853	490	574	399	785	400.101	80.020
	858	522	588	426	800	425.194	85.039
	832	488	577	393	777	450.067	90.013
	801	460	531	338	738	474.868	94.974
	459.200	442.452	427.851	406.952	388.867	2125.322	425.064
V'_k	91.840	88.490	85.570	81.390	77.773		$85.013 = M'_b$

$H'_r - M'_b$	$V'_k + H'_r - M'_b$				
— 9.995	81.845	78.495	75.575	71.395	67.778
— 4.993	847	497	577	397	780
+ 0.026	866	516	596	416	799
+ 5.000	840	490	570	390	773
+ 9.961	801	451	531	351	734

Zweite Verbesserungen, graphisch in Fig. 5 in $^1/_{1000}$ Graden.

— 11	+ 3	— 6	— 1	+ 11
— 6	+ 7	+ 3	— 2	— 5
+ 8	— 6	+ 8	— 10	— 1
+ 8	+ 2	— 7	— 3	— 4
— —	— 9	— —	+ 13	— 4

Die gewonnenen zweiten Verbesserungen, in Fig. 5 verzeichnet, sind sehr gering, aber doch noch merklich.

9. Die verbesserte Mittelkurve Fig. 4 (durch kürzere Striche und Punkte bezeichnet) wurde nun nach Fig. 6 so übertragen parallel mit sich selbst, dass die der Abseisse 76° entsprechende Ordinate mit der der Mittelkurve Fig. 1 zusammen fiel. (Die letztere war vorher um 10 Theile tiefer gezeichnet worden in der Fig. 7). — Wird nun die Curve in Fig. 6 mit Hülfe eines Werthes $\alpha = 0{,}0046$ um den festgedachten zu 76° gehörigen Ordinatenpunkt gedreht, so fällt sie in die Fig. 7 (durch Kreuze bezeichnet), und wird mehrmals von der mit sich selbst parallel versetzten Kurve der Fig 1 durchschnitten. Die grösste Abweichung beträgt 0,015 Grad. — Die früher bestimmte Curve hat indess mehr Gewicht.

Dass die zweiten Verbesserungen in der letzten Rechnung so geringe Werthe erhielten, das liegt an der kleineren Zahl von Beobachtungen. Je weniger solcher vorhanden sind, um so mehr schliesst sich das Endresultat denselben an, um so kleiner erscheinen die Beobachtungsfehler, und um so mehr ist ist das Endresultat unsicher.

Auch die Correctionen der unteren Enden lassen sich durch Drehung, ($\alpha = 0{,}0046$), in fast völlige Uebereinstimmung bringen mit den Ordinaten der entsprechenden Abscissenstrecken, wie eine leichte Ueberlegung sogleich zeigt.

VI. Die Abtrennung der Fäden.

Die meisten sorgfältig gearbeiteten Thermometer gestatten, namentlich, wenn die Röhren eng sind, ohne Weiteres die Abtrennung eines Fadens. Man braucht sie blos vertikal zu stellen mit der Kugel nach oben, und gelinde zu stossen. Fürchtet man, das Thermometer durch stärkeres Aufklopfen zu beschädigen, so fasse man statt dessen dasselbe mit der ganzen Hand, die Kugel nach unten gerichtet, und führe eine mehr oder weniger heftige Armschwenkung aus. Durch Einwirkung der Schwungkraft trennt sich alsdann gewöhnlich ein Faden ab, dessen Länge in allen Fällen später beliebig geändert werden kann.

Sind bei luftleeren Thermometern die Röhren weit, so wird man oft finden, dass die ganze Quecksilbermasse sich leicht hin und her bewegt, ein Faden trennt sich alsdann nicht ab, sondern in der Kugel bildet sich ein Vacuum.

Doch auch in diesem Falle ist es mir meist, wenn auch erst nach viel vergeblichem Hin- und Herschwenken gelungen, den Zweck zu erreichen: Man bringt es zunächst leicht durch rasches Aufrichten der Röhre dahin, dass das Vacuum sich an der Verbindungsstelle zwischen Röhre und Kugel befindet. Ein gelindes Aufklopfen bei horizontaler Lage des Thermometers bringt jetzt oft eine Trennung hervor. — Hierbei sind meist sehr weiche Hand-

bewegungen nöthig. Zuweilen ist es nothwendig, sogleich nach dem plötzlichen Aufrichten der Röhre, dieselbe so schnell wieder in horizontale Richtung zu bringen, dass der leere Raum bei der Verbindungsstelle zwischen Kugel und Röhre, noch sichtbar bleibt. — Jetzt erwärmt man die Kugel bis der genannte Raum hahezu ausgefüllt ist, und ein gelindes Klopfen bringt alsdann die Abtrennung eines Fadens zu Stande. —

Wie dieser letztere nach Wunsch verlängert oder verkürzt wird, ist leicht einzusehen. Bekanntlich trennt sich der Faden leicht wieder an der Stelle ab, wo die Quecksilbermassen bei Aufrichtung der Röhre zusammentrafen. Erwärmt man die Kugel, so tritt einiges Quecksilber über diese Stelle hinaus, und der Faden wird um so viel länger, als Quecksilber über die Trennungstelle lief. — Will man den Faden verkürzen, so lässt man diesen zunächst abgetrennt liegen, erwärmt erst die Kugel, und lässt dann durch Aufrichtung der Röhre die Quecksilbermassen zusammenfliessen. Während der langsamen Erkaltung der Kugel tritt nun wieder eine genau bestimmte Menge aus dem Faden über die Trennungsstelle hinweg, zurück in die Kugel. Bis auf $^1/_{10}$ Grad genau kann auf diese Weise leicht die erwünschte Länge des Fadens erhalten werden. —

Man findet vielfach den Rath angegeben, es solle die Thermometerröhre an der Stelle, wo die Abtrennung geschehen soll, mit der Löthrohrflamme erwärmt werden. Ich kann mir aber nicht denken, dass bei Thermometern, die mit einem Glasmantel umgeben sind, ohne Gefahr für den Apparat dieses Verfahren eingeschlagen werden dürfte.

Wenn endlich verhältnissmässig viel Luft in der Röhre enthalten ist, so gelingt eine Abtrennung meist nur durch die oben beschriebene plötzliche Schwenkung des ganzen Thermometers mit dem Arm. Doch ist, wenn auch dieses gelungen, eine nach Wunsch zu verändernde Einstellung des abgetrennten Faden nicht möglich, wenn dieser sich nur durch gewaltsame Bewegungen verschieben lässt. Für die Correktion bleibt nur der sehr mangelhafte Weg des Vergleiches mit bereits regulirten Thermometern übrig [1]).

---

1) Wenn man sich ein Thermometer aussucht, so überzeuge man sich stets davon, ob ein Faden sich abtrennen lässt. Wenn letzteres nicht der Fall, so thut man besser, solch ein Thermometer nicht zu kaufen.

Zweiter Theil.

Die Kalibrirmethoden von Gay-Lussac, Rudberg, Hällström und Egen.

Nachdem wir eingehend die Besselsche Methode erörtert und deren Genauigkeit geprüft haben, liegt uns noch ob, dieselbe mit den übrigen bisher vorgeschlagenen zu vergleichen. —

1. Die Methode von Gay-Lussac.

1. Diese ist die einfachste von allen. Ein kurzer Quecksilberfaden wird in der Röhre verschoben, der untere und obere Endpunkt notirt, — allemal aber beim Fortrücken das untere Ende genau an den Punkt gebracht, bis zu welchem bei der vorhergehenden Beobachtung das Quecksilber reichte. — Die ganze Röhre wird dadurch in eine Anzahl gleich grosser Volumtheile getheilt. Je kürzer der Faden, um so genauer können die einzelnen Theile der Röhre bestimmt werden. —

Diese einfache Methode ist sehr alt und in die meisten Lehrbücher der Physik übergegangen.

Am sorgfältigsten dargestellt wurde sie von Pierre[1]), der das Verfahren in der Art und Weise beschreibt, wie Regnault dieselbe auszuführen und in den Vorlesungen am Collège de France vorzutragen pflegt. — Regnault und Pierre geben aber eigentlich keine Correktions-, sondern nur eine Kalibrirmethode, denn die Thermoterröhre ist von der Skale getrennt, und mit Hülfe einer Theilmaschine werden die verschiedenen Längen der Quecksilberfäden durch ein Fernrohr beobachtet, und erst nach der Beobachtung mit Hülfe derselben Theilmaschine die Skalen verfertigt. — Ueberhaupt können Kalibrir- und Correktionsmethoden unterschieden werden. Zu den ersteren gehören die von Gay-Lussac und Rudberg, zu den letzteren die von Hällström, Bessel und Egen. Selbstverständlich kann jede Correktionsmethode zur Kalibrirung dienen, nicht aber umgekehrt. Eine genaue Ablesung, wie sie Pierre verlangt, dürfte bei den meisten fertigen Thermometern kaum thunlich sein, namentlich wenn, wie in neueren Zeiten gewöhnlich geschieht, die Thermometerröhre nebst Skale in einen Glasmantel eingeschmelzt ist, welch letzterer zu wenig gleichartig in der Masse ist, um deutliche Bilder im Fernrohr oder Mikroskop zu geben. Schon aus diesem Grunde entbehrt die Methode eines Vorzuges. Wenn aber nach ausgeführter Kalibrirung und Skalenverfertigung das Thermometer kontrollirt werden soll, so sieht man leicht ein, dass zu einer andern Methode gegriffen werden muss. — Ueberhaupt lässt sich Manches gegen ein doppeltes Verfahren, nämlich das Kalibriren und nachherige Corrigiren, einwenden. Die erste sehr mühsame Arbeit scheint umsonst gethan, wenn eine Correktion nachträglich doch noch nothwendig erscheint. Denn es dürfte kaum als Vortheil angesehen werden, wenn eine geringe Verbesserung, statt

---

1) Pogg. Ann. Bd. 57. p. 554. Anm. 1. — Ann. de chim. et de phys Ser. III. T. V p. 427. — Schon Lambert giebt in seiner Pyrometrie 1779 ein ähnliches Verfahren an.

einer grösseren, an einer Beobachtung anzubringen bleibt. — Pierre empfiehlt auch Fäden von verschiedener Länge zu beobachten, namentlich solch einer Länge, die kein multiplum oder submultiplum der zuerst gewählten ist, damit eine Controlle der verschiedenen Beobachtungen ermöglicht werde. — Wie diese Controlle auszuführen sei, wird an der angeführten Stelle gänzlich übergangen, und dass überhaupt nach vorangegangener Kalibrirung es mit der nachfolgender Correktion nicht ernstlich gemeint sei, dass schliesse ich aus den beiden Schlusssätzen:

„Wenn alle diese Prüfungen wohl ausgeführt sind, können „offenbar" die verschiedenen Berichtigungstafeln, die man später ableitet, nur noch äusserst kleine Unterschiede darbieten." Und weiter: „Sobald die Röhren nach dem vorhin beschriebenen Verfahren kalibrirt worden, sind die Berichtigungen, welche man durch diese Prüfungsmethode findet, immer äusserst klein, (also doch vorhanden), und oft ganz zu vernachlässigen." Zwar muss man zugestehen, dass die gedachten späteren Berichtigungen klein sein werden. Unzweifelhaft werden aber gerade bei der Skalenverfertigung, durch Temperaturschwankungen, durch mangelhafte Einstellung u. s. w., Fehler entstehen, die nicht mehr nach der angeführten Methode nachher fortgeschafft werden können. Die vorangegangene Kalibrirung scheint mir sogar in dem Maasse schädlich und nutzlos, als sie genauer ausgeführt wird, denn der Beobachter neigt dann zur Vernachlässigung der späteren Berichtigung, die doch als Hauptsache stehen bleibt, da nur mit dem fertigen Thermometer und nicht mit der blossen Röhre experimentirt wird.

Derselbe Einwand ist gegen das Verfahren zu erheben, das Welsh[1]) im Kew'schen Observatorium anwandte. Auch hier wird das Thermometer zuerst kalibrirt, und dann korrigirt. — Letzteres wurde schon von Erman[2]) bemerkt und gerügt. — Einer späteren Mittheilung zu Folge[3]) wurden die „unter Leitung Regnault's kalibrirten Thermometer" nicht weiter kontrollirt, sondern der beigefügte, jedem Thermometer eigenthümliche Kalibermaassstab in Fahrenheit'sche Grade verwandelt. —

3. Wird die Gay-Lussac'sche Methode auf bereits fertige Thermometer angewandt, so entstehen mehre Bedenken gegen dieselbe. Schon Bessel bemerkt[4]), dass die Ablesungsfehler sich häufen müssen, und zwar um so mehr, als die Fäden kürzer und zahlreicher sind, welch letzterer Umstand wiederum von anderer Seite zu einer grösseren Genauigkeit nothwendig erscheint. — Weiter aber muss bemerkt werden, dass es sehr schwer ist, kurze Fäden, namentlich in engen Röhren, abzutrennen, und dass, auch wenn solches gelungen, dieselben nur sehr schwer im Innern fortgeschoben werden können. — Das früher behandelte Geissler'sche Normalthermometer wollte ich nach der Gay-Lussac'schen Methode korrigiren, scheiterte aber an der Unmöglichkeit, Fäden von weniger als 15° Länge abzutrennen, so dass schon um dieses einen Umstandes wegen ein anderes Verfahren geboten erschien. Ganz dasselbe bemerkt schon Rudberg[5]), der desshalb eine neue Methode sich ersann. Unserem Gegenstande liegt nach allem Angeführten die Gay-Lussac'sche Methode fern. Sie mag stets mit Nutzen ange-

---

1) Proc. of Roy. Soc. VI. p. 178 und Phil. Mag (4) IV p. 306. —

2) Fortschr. d. Phys. für 1852 p. 664. Erman nennt hier die Bessel'sche Methode eine solche, die sicher und schnell die gesuchten Werthe liefert. Dass Welsh nach derselben später corrigirt habe, wie in den „Fortschritten" berichtet wird, geht nicht aus der Originalabhandlung hervor. Hier wird nämlich bloss versichert, die nothwendigen Correktionsgrössen seien dadurch gefunden worden, dass man längere Fäden verschob und deren Länge maass. Welcher Art die endgültige Verbesserung berechnet worden, darüber ist nichts Näheres angegeben. — Man nennt oft jedes Verfahren, bei dem mehrere und längere Fäden beobachtet werden, irrthümlicher Weise Bessel'sche Methode; die Beobachtung der Fadenendpunkte liegt aber allen zu Grunde: die Art der Verwerthung, die Berechnung der Verbesserungen begründet den Unterschied der Methoden.

3) Rep. of. Brit. Association 1853. 2 p. 34.

4) Pogg. Ann. Bd. 6 p. 291.

5) Pogg. Ann. Bd. 40 p. 562. — Eine vorläufige Ankündigung in Pogg. Ann. Bd. 37. p. 376. — Hier wird angeführt, „ein Thermometer, dessen Grade eine Länge von 2 Millim. besässe, könne man bis auf 0,2 Grad mit Sicherheit theilen." — Diese Anforderung erscheint wohl keineswegs befriedigend.

wandt werden, wenn es gilt noch unbearbeitete Röhren zu untersuchen, in welchen auch ganz kurze Fäden leicht fortbewegt werden können. Die Ablesungen eines genauen mit der Röhre verbundenen Maassstabes bei sorgfältig angestellter Beobachtung geben unmittelbar das Kaliber an.

Ausser der so eben besprochenen giebt es noch eine Methode, die nicht zur Correktion fertiger Thermometer, sondern bloss zur Kalibrirung, im strengeren Sinne des Wortes, dient, die wir hier kurz anführen wollen.

II. Rudberg's Methode.

1. Rudberg sucht mit längeren Fäden, „die sich stets leichter abtrennen lassen", zu operiren. Der kürzeste derselben braucht nur $^1/_3$ des Volumens der ganzen Röhre zu haben. Folgweise werden nämlich Fäden genommen, die sehr nahe $= {}^1/_2$; $^1/_3$; $^5/_{12}$; $^{11}/_{24}$; $^{23}/_{48}$ u. s. w. des ganzen Volumens betragen. Es gehe das Thermometer von 0 bis 100°. An dem ersten Faden, den man zuerst mit dem untern Ende auf 0°, dann mit dem oberen auf 100° einstellt, beobachtet man je das obere und untere Ende, n_1 und n_2; alsdann wird 50° bei $\frac{n_1 + n_2}{2}$ sein, wenn n_1 und n_2 nicht sehr verschieden von einander sind. Neue Bestimmungen für denselben Ort erhält man dadurch, dass man denselben Faden um ein weniges verkürzt oder verlängert, und dann das Mittel aus mehreren Bestimmungen nimmt. Jetzt wird eine Säule abgetrennt, welche sehr nahe $= {}^1/_3$ des Volumens, und mittelst dieser wird die ganze Strecke von 0 bis 100 in 6 gleich grosse Theile getheilt. — Der Faden reiche von 0 bis n', werde auf n' genau (?!) eingestellt und reiche bis n'', endlich reiche er von 100° rückwärts bis n''', so ist, „wenn $\lambda = n''' - n''$ wie fast immer sehr klein",

$$3\,x \pm \lambda = 100^0$$

$$\text{also } x = 33\,{}^1/_3{}^0 \mp \frac{\lambda}{3}$$

folglich $33^0\,{}^1/_3$ bei n' $\pm\, {}^1/_3\,\lambda$

$66^0\,{}^2/_3$ bei n''' $\mp\, {}^1/_3\,\lambda$

Zur Controlle beobachtet man auch von 100° aus zweimal rückwärts, und einmal von 0° vorwärts denselben Faden. Die übrigen Sechstel des Volumens werden dadurch bestimmt, dass dieselben Fäden von dem bereits gefundenen 50° = Punkte aus einmal nach 0°, denn nach 100° hinlaufend, beobachtet werden.

Man erkennt leicht, wie die Fäden von der Länge $^5/_{12}$, $^{11}/_{24}$ oder $^{13}/_{24}$ dazu dienen, die Unterabtheilungen der Röhre zu kalibriren. — Es wird nämlich zuerst die Fadenlänge ermittelt, indem man die Länge $^5/_{12}$ zweimal von 0 aus einstellt, und das zuletzt beobachtete Ende, das um $^5/_6$ von 0° absteht, mit der früheren Bestimmung dieses Punktes vergleicht. Der Unterschied giebt die Correktion der Fadenlänge. Vom Endpunkte $^5/_{12}$ aus muss der halbe Unterschied dieser Fadenlänge abgezogen oder hinzugefügt werden, und so erhält man den Ort $^5/_{12}$ genau. —

2. Rudberg führt in seiner Abhandlung[1]) ein Beispiel aus. Es genüge hier auf einige wesentlichere Umstände hinzuweisen. — Die Röhre wird mit einem Maassstabe fest verbunden, und wenn dieser genau gearbeitet, so erhält man in der That einen Ueberblick über das wahre Volumen der Röhre; als Correktion eines fertigen Thermometers kann die Methode nicht dienen, weil der Maassstab überall gleich gross vorausgesetzt wird. Vor Allem aber verliert sie dadurch an Werth, dass, ähnlich wie bei der Gay-Lussac'schen Methode, einmal bestimmte Grössen, als Ausgangspunkt für andere Theile der Skale dienen, dass also ebenso wie dort, auch hier die Beobachtungsfehler sich häufen, was bei der Bessel'schen Methode niemals geschieht. So dient im vorliegenden Falle der Punkt 50° als Ausgang für den Punkt

1) Kongl. Vetenskaps-Academiens Handlingar för år 1834 p. 378. Pogg. Ann. Bd. 40 p. 574.

$83^1/_3$; mit Hülfe dieses letzteren wird die Länge des Fadens $^5/_{12}$ bestimmt, und alle Verbesserungen werden durch den ersten bei 50° begangenen Fehler beeinflusst. Die Methode mag immerhin ihren Werth haben, in solchen Fällen, wo es gilt, sehr feine Röhren zu untersuchen, in welchen kurze Fäden nicht mehr verschiebbar sind; als Correktionsmethode kann sie aber garnicht dienen, auch erkennt Rudberg selbst die Bessel'sche Methode als die beste an, er verwirft sie bloss, weil sie, streng ausgeführt, „sehr weitläufig" sein solle. — Gehen wir nun über zu den beiden anderen genannten Kalibrir- und Correktionsmethoden.

III. Hällström's Methode.

1. Diese Methode ist durchaus einer besonderen Beachtung werth, weil sie, namentlich da, wo eine geringere Genauigkeit erstrebt wird, sehr rasch zum Ziele führt. Es soll dieselbe hier ausführlich dargethan, und auf das vorhin bereits untersuchte Geisslersche Normalthermometer angewandt werden. Sie erscheint an und für sich schätzenswerth, dann aber auch, weil sie mit der berichtigten Besselschen Methode combinirt werden kann, wodurch man am schnellsten zum Ziele gelangen dürfte. —

Die Originalabhandlung [1]) ist sehr oft mit grösster Anerkennung citirt worden [2]); so viel ich aber auch nachgesucht habe, kann ich doch nirgends eine eingehende Darstellung der Methode finden [3]). Um so mehr erscheint hier eine Aufnahme derselben gerechtfertigt.

2. Zwei Punkte der Skale, etwa 0° und 100°, werden als fest angenommen, und die Correktionen der übrigen durch das Volumen dieser Strecke gemessen. Zwei Fäden von der Länge x und y werden abgetrennt, so jedoch, dass dieselben möglichst nahe submultipla der ganzen Strecke sind. Ganz wie zuvor bei der Besselschen Methode werden die unteren Enden der Fäden, folgweise auf die unteren Hauptpunkte gesetzt, und die oberen Enden beobachtet. Damit hiebei die Schätzungsfehler vermindert werden, ist es zweckmässig mehre Beobachtungen an jeder Stelle auszuführen, wie solches früher schon (Seite 43) beschrieben wurde.

Jetzt ermittelt man die auf das gewählte Maass bezogene wahre Länge des Fadens auf folgende Weise:

Der Faden x sei nahezu n mal in der Strecke 0° bis $100° = G$ enthalten, und zwar reiche er vom Punkte a (0°) bis um eine kleine Grösse r_1 über den oberen Hauptpunkt b hinaus. Ferner vom unteren Hauptpunkt b bis um r_2 über den Hauptpunkt c, u. s. w., endlich von $n-1$ bis um r_n über n $(= 100°)$ hinaus. Alsdann ist

$$\begin{aligned} x &= (a,b) + r_1 \\ x &= (b,c) + r_2 \\ x &= (c,d) + r_3 \\ &\vdots \\ x &= (n-1,n) + r_n \end{aligned}$$

$$\text{folglich } nx = G + (r_1 + r_2 + \ldots + r_n)$$

$$\text{und } x = \frac{G}{n} + \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n}$$

---

1) Anmerkningar angående thermometrars förfärdigande och bruk. — Med. Philos. Facultetens vid Keyserl. Universitet i Åbo bifall, under inseende af. Mag. G. G. Hällström, för lagern till allmän ompröfning utgifne af Ed. Bergenheim. 1823.

2) So namentlich von Bessel (Pogg. Ann. Bd. VI. p. 291) und Poggendorff (Pogg. Ann. Bd. 9. p. 535 Anm.)

3) Auch thut ihrer Rudberg bloss mit flüchtiger Kritik Erwähnung (Pogg. Ann. Bd 40 p. 564). — In einem kleinen 1861 erschienenen 396 Seiten zählenden Büchlein von Gieswald „Lehre von der Thermometrie, der Pyrometrie, Hypsometrie, Psychometrie und Barometrie u. s. w. mit 14 Quarttafeln. Weimar" ist freilich auch die Hällström'sche Methode dargestellt, aber nur soweit, als Rudberg dieselbe anführt. — Man kann diesem Büchlein einen gewissen Werth nicht absprechen, namentlich wenn man sich die Citate derjenigen Arbeiten sammelt, von denen hier wörtliche Abschriften geliefert sind, denn der Verfasser hat das zu thun versäumt. — Auch Bessel's Methode ist für Denjenigen, der Pogg. Ann. Bd. 6 nicht besitzt, wortgetreu wiedergegeben, mit allen Rechen- und Druckfehlern. —

Diesen Werth von x nimmt man als durchschnittliche Länge des Fadens an. Alsdann ist die wahre Länge

$$\begin{aligned} \text{der Strecke } (a,b) &= x - r_1 \\ (b,c) &= x - r_2 \\ &\vdots \\ (n_{-1},n) &= x - r_n \end{aligned}$$

Wird $a = o^0$ und $n = 100^0$ angenommen, so erhält man folgende Correctionstafel für die Hauptpunkte b, c .... n:

Skalenpunkte.	
abgelesen	berichtigt
$a = 0^0$	$0^0 = 100^0 - (nx - (r_n + \ldots\ldots + r_2 + r_1)) = 0$
b	$x - r_1$
c	$2x - r_1 - r_2$
d	$3x - r_1 - r_2 - r_3 = 100^0 - ((n-3)\,x - (r_n + r_{n+1} \ldots\ldots + r_3))$
⋮	⋮
$n - 1$	$(n-1)\,x - r_1 - r_2 - \ldots\ldots - r_{n-1} = 100^0 - (x - r_n)$
$n = 100^0$	$nx - r_1 - r_2 \ldots\ldots - r_n = 100^0$

Ganz ebenso verfährt man mit dem Faden y. Wenn die Länge desselben kein submultiplum von 100^0 sein sollte, so kann man doch aus den vorstehenden Hauptpunkten a bis n einen solchen Punkt aussuchen, der nahezu ein Vielfaches von y. Das sei der Hauptpunkt k (etwa 60^0, wenn $x = 20^0$ und $y = 15^0$ lang). Die zu k gehörige und durch x bereits gefundene Correktion giebt aber die Strecke (a, k) in wahren Graden, und man hat

$$\begin{aligned} y &= (a\ ,\ b') + r' \\ y &= (b',\ c') + r'' \\ &\vdots \\ y &= (k-1\ ,\ k) + r^k \\ &\vdots \\ y &= (n'-1\ ,\ n') + r^{n'} \end{aligned}$$

$$\text{folglich } k\,.\,y = (a\ ,\ k) + r' + r'' + \ldots\ldots r^k, \text{ und}$$

$$y = \frac{(a\ ,\ k)}{k} + \frac{r' + r'' + \ldots\ldots + r^k}{k}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich die Strecke } (a\ ,\ b') &= y - r' \\ (b',\ c') &= y - r'' \\ &\vdots \\ (k-1\ ,\ k) &= y - r^k \\ &\vdots \\ (n'-1\ ,\ n') &= y - r^{n'} \end{aligned}$$

und hieraus die corrigirten Punkte

Skalenpunkte.

abgeles.	berichtigt
$a = 0^0$	$0^0 = (o,k) - (ky - (r^k + \ldots + r'' + r'')) = 0$
b'	$y - r'$
c'	$2y - r' - r''$
⋮	
k	$ky - r' - r'' - \ldots - r^k = (a,k)$
$k+1$	$(a,k) + y - r^{k+1}$
⋮	
$n'-1$	$(n'-1)y - r' - r'' - \ldots - r^{n-1} = (a,k) + (n'-1-k)y - r^{k+1} - \ldots - r^{n'-1}$
n'	$n'y - r' - r'' - \ldots r^n = (a,k) + (n'-k)y - r^{k+1} - \ldots - r'^n$

Die gefundenen Correktionen für die Hauptpunkte a, b, c ..... n, b', c' ... k, ... $n'-1$, n' bilden nun den Ausgangspunkt für die übrigen beobachteten Werthe [1]).

3. Ehe wir das weitere Verfahren darstellen, wollen wir ein Zahlenbeispiel folgen lassen. An dem früher bereits kalibrirten Geisslerschen Normalthermometer wurden zwei Fäden von nahezu resp. 20 und 25 Grad Länge abgetrennt, und in der beschriebenen Art von 5 zu 5 Grad die oberen Enden abgelesen. Drei Beobachtungen wurden an jeder Stelle angestellt, (sub. a, b, c) und das Mittel aus diesen (sub. r) in Rechnung gebracht.

A. Hauptpunkte.		B. Abweichung der Fäden vom oberen Hauptpunkte.				C. Ermittelter Gradwerth der Strecken A $=x-r$	A'. Hauptpunkte.		B'. Abweichung der Fäden vom oberen Hauptpunkte.				C'. Ermittelter Gradwerth der Streck. A' $=y-r$
Unt.	Ober.	a. 1. Beob. +	b. 2. Beob. +	c. 3. Beob. +	r. Mittel +		Unt.	Ober	a 1. Beob. +	b. 2 Beob. +	c. 3. Beob. +	r. Mittel +	
0	20	0.19	0.18	0.18	0.183	19.976	0	25	0.14	0.13 0.15	0.15 0.12	0.148	25.012
5	25	0.11	0.12	0.13	0.120	20.039	5	30	0.10	0.09	0.09	0.093	25.067
10	30	0.10	0.09	0.09	0.093	20.066	10	35	0.08	0.06	0.07	0.070	25.090
15	35	0.07	0.07		0.070	20.089	15	40	0.01	0.02	0.02	0.017	25.143
20	40	0.04	0.05	0.04	0.043	20.116	20	45	0.01	0.01	0.03	0.017	25.143
25	45	0.08	0.07	0.09	0.080	20.079	25	50	0.06	0.05	0.06	0.057	25.103
30	50	0.06	0.07	0.08	0.070	20.089	30	55	0.07	0.06	0.09 0.08	0.075	25.085
35	55	0.10	0.11	0.10	0.103	20.056	35	60	0.13	0.12	0.14	0.130	25.030
40	60	0.17	0.16	0.16	0.163	19.996	40	65	0.21	0.21	0.20	0.207	24.953
45	65	0.24	0.22	0.22	0.227	19.932	45	70	0.29	0.28	0.27	0.280	24.880
50	70	0.31	0.31	0.31	0.310	19.849	50	75	0.35	0.36	0.36	0.357	24.803
55	75	0.34	0.35	0.35	0.347	19.812	55	80	0.32	0.32	0.33	0.323	24.837
60	80	0.30	0.30	0.31	0.303	19.856	60	85	0.25	0.27	0.25	0.257	24.903
65	85	0.23	0.24	0.23	0.233	19.926	65	90	0.21	0.22	0.21	0.213	24.947
70	90	0.15	0.17	0.14	0.153	20.006	70	95	0.13	0.14	0.14	0.137	25.023
75	95	0.08	0.09	0.09	0.087	20.072	75	100	0.08	0.08	0.07	0.077	25.083
80	100	0.11	0.10	0.10	0.103	20.056							

Zur Ermittelung der Fadenlängen wurden folgende Beobachtungen gewählt, die alsdann das Mittel ergaben:

$$x = (0,20) + 0.183$$
$$x = (20,40) + 0.043$$
$$x = (40,60) + 0.163$$
$$x = (60,80) + 0.303$$
$$x = (80,100) + 0.103$$
$$\overline{5x = (0,100) + 0.795}$$
$$x = 20^0,159$$

$$y = (0,25) + 0,148$$
$$y = (25,50) + 0.057$$
$$y = (50,75) + 0.357$$
$$y = (75,100) + 0.077$$
$$\overline{4y = (0,100) + 0.639}$$
$$y = 25^0,160$$

1) Eine Verwechselung, jenachdem k einen Index, einen Coefficienten, oder einen Hauptpunkt darstellt, kann hier nicht stattfinden.

Diese Werthe von x und y wurden benutzt, um oben die Rubriken (C und C′) der Gradwerthe aller beobachteten Strecken = (x — r) auszufüllen. Jetzt bestimmen wir die Verbesserungen der Hauptpunkte: 20, 40, 60, 80; 25, 50; 75. Aus obiger Tabelle unter C und C′ folgt:

Skalenpunkt beob.		verbessert	Skalenpunkt beob.		verbessert
20 = 19.986		= 19.976	0		0
40 = 19.976	+ 20.116	= 40.092	25 = 25,012		= 25,012
60 = 40.092	+ 19.996	= 60.088	50 = 25,012	+ 25.103	= 50,115
80 = 60.088	+ 19.856	= 79.944	75 = 50,115	+ 24.803	= 74,918
100 = 79.944	+ 20.056	= 100.000	100 = 74.918	+ 25.083	= 100,001

Alle von diesen um 20 und 25° abstehenden Hauptpunkte können wir nun unmittelbar finden, wenn wir jedesmal den wahren Gradwerth der hinzukommenden oder abzuziehenden Strecken den Columnen C und C′ entnehmen, wodurch alle Hauptpunkte bestimmt werden, ausgenommen im vorliegenden Fall die Skalenpunkte 10° und 90°, die aber, nachdem die übrigen sämmtlich bestimmt, dadurch auf doppelte Art erhalten werden können, dass einmal die Strecke x von 10 bis 30° = 20,066 vom verbesserten Gradwerthe von 30° und dann, dass y von 10° bis 35° = 25.090 vom verbesserten Gradwerthe von + 35° abgezogen wird. — Dadurch erhalten wir folgende Bestimmungen.

Skalenpunkte.	Verbess. Ausgangspunkte, an welche die Längen x oder y anges. werden	Gefunden durch x — r aus der Rubrik C.	Gefunden durch y — r aus der Rubrik C′.	Verbesserter Gradwerth.
0	0			0
5	25.012	20.039		4.973
10	—			9.964
15	40.092		25.143	14.949
20	—			19.976
25	—			25.012
30	50.115	20.089		30.026
35	60.088		25.030	35.058
40	—			40.092
45	25.012; 19.976	20.079	25.143	54.105 (med.)
50	—			50.115
55	74.918; 79.944	19.812	24.837	55.107 (med.)
60	—			60.088
65	40.092		24.953	65.045
70	50.115	19.849		69.964
75				74.918
80				79.944
85	60.088		24.903	84.991
90				89.981
95	74.918	20.072		94.990
100				100.000

Nachträglich erhielten wir die Verbesserungen für 10 und 90°. —

Nämlich für 10° = 30.026 — 20,066 = 9.960 durch x (10, 30)

und 10° = 35.058 — 25.090 = 9.968 durch y (10, 35)

im Mittel 9.964, welche Grösse oben eingetragen wurde, als Verbesserung für 10° der Skale (letzte Rubrik), ebenso für 90° durch x (70, 90)

69.964 + 20.006 = 89°.970

und durch y (65, 90) 65.045 + 24.947 = 89°.992

im Mittel 89°.981

In der letzt erhaltenen Tabelle sind nun sämmtliche Verbesserungen von 5 zu 5 Grad gegeben. Wollte man jetzt die bisher unverwerthet gebliebenen Gradstrecken der Rubriken C und C′ noch berücksichtigen, so erhielten wir etwas geänderte verbesserte Skalenwerthe.

In der That verfährt Hällström so, und erhält dadurch je andere Werthe für die verschiedenen Hauptpunkte, aus welchen alsdann die arithmetischen Mittel als endgültige Verbesserungen angenommen werden. Da hiebei aber nicht das Gewicht der einzeln gewonnenen Werthe berücksichtigt wird, so erscheint das Verfahren bei ihm nicht methodisch. Wir erhalten im vorliegenden Falle wenn wir die resp. Gradstrecken x — r und y — r, der Rubriken C und C' den bisher gefundenen Verbesserungen hinzufügen, folgende Werthe

Beobacht. Skalenpunkte.	Berechnet durch	
	x — r	y — r'
0	0	0
5	4.973	4.959
10	9.960	9.964
15	14.969	14.949
20	19.976	19.962
25	25.012	25.012
30	30.030	30.040
35	35.038	35.058
40	40.092	40.092
45	45.091	45.119
50	50.115	50.115
55	55.114	55.111
60	60.088	60.088
65	65.037	65.045
70	69.964	69.985
75	74.920	74.918
80	79.944	79.941
85	84.971	84.991
90	89.970	89.992
95	94.990	94.987
100	100.000	100.000

Die Differenz beträgt im maximo 0,02 Grade. Die Mittelwerthe aus den beiden vorstehenden Tabellen würden indess keineswegs mehr Gewicht haben, als die vorhin gefundenen Verbesserungen, weil hier, wie bereits erwähnt, nicht einer jeden Beobachtung dasselbe Gewicht zugemessen. — Ueberhaupt mag dieser Umstand der Methode zum Vorwurf dienen, denn von Anfang an werden schon einzelne Werthe zur Bestimmung einer durchschnittlichen Fadenlänge ausgesondert.

4. Vergleichen wir die vorhin gefundenen Verbesserungen (S. 54) mit der Correktionskurve, die sich nach der Besselschen Methode ergab: — Auf Taf. III Fig. 5 ist die damals gefundene Curve (Taf. V Fig. 1) reproducirt, so jedoch dass sämmtlichen Ordinaten ein Stück $= 0^{o},150$ hinzugefügt erscheint. Hiedurch wird die Verbesserung für $0^{o} = 0$. — Die ganze Curve ist parallel mit sich selbst verschoben. In Fig. 4 Taf. III sind die Verbesserungen die wir soeben fanden, graphisch eingetragen und von 5 zu 5 Grad der Abscisse mit Kreuzen bezeichnet. — Wird nun die letztere Curve um den Anfangspunkt 0^{o} gedreht, so dass die Ordinaten für 50^{o} genau zusammenfallen, so erfordert die Reduktion einen Drehungscoefficienten $\alpha = 0{,}00184$, denn die Differenz der Ordinaten bei 50^{o} ist $= 0{,}207 - 0{,}115 = 0{,}092$ und $0^{o}.092 : 50^{o} = 0{,}00184$. — Dadurch entsteht die Curve Fig. 6, die ebensowohl als Verbesserung genommen werden kann. Man sieht, dass die Differenzen beider (Fig. 5 und 6) sehr gering; im Maximo 0,03 Grad bei der Abscisse 85^{o}. — Kleiner als 0,01 sind die Differenzen an allen zuerst bestimmten Hauptpunkten: 0 ; 20 ; 25 ; 40 ; 50 ; 60 ; 75 ; 80 ; 100.

Die ganze Seite 53 und 54 ausgeführte Rechnung nimmt in der That sehr wenig Zeit in Anspruch, so dass man vielleicht gut thäte, bei Anwendung der Besselschen Methode zuerst alle Beobachtungen nach einer Curve, wie sie die Hällströmsche Rechnungsart liefert, vorläufig zu corrigiren. Es brauchen desshalb nicht mehr Beobachtungen als sonst angestellt zu werden. In der Tab. Seite 37 liessen sich leicht die beiden letzten Vertikalreihen so auswählen, dass sie identisch werden mit den Beobachtungen Seite 53. Im vorliegenden Falle

ist übrigens dadurch eine grössere Genauigkeit erreicht, dass für jede Stelle ein Mittel aus 3 Beobachtungen genommen wurde, was viel Zeit kosten würde, wenn man mit derselben Präcision jene Tab. (Seite 37) herstellen wollte.

Schliesslich braucht kaum noch ausdrücklich bemerkt zu werden, dass man nach der vorliegenden Hällströmschen Methode auch Correktionswerthe für kleinere Gradstrecken erhalten kann, wenn man x und y andere passende Werthe ertheilt. Der den Längen x und y gemeinsame Faktor bestimmt die kleinste Strecke, um welche die zu corrigirenden Skalenpunkte von einander abstehen. Wenn x und y relativ prim zu einander, so erhält man Verbesserungswerthe für jeden einzelnen Grad, da die Gleichung $mx - ny = 1$ sich stets mit ganzen Zahlen für m und n auflösen lässt; — allerdings muss die Länge des ganzen Thermometers mindestens $= xy$ sein. Nur in dem Falle, wo die Thermometerröhre sehr bedeutende Ungleichheiten des Kalibers aufweist, dürfte, wie schon Rudberg mit Recht bemerkt, die Anwendung der Methode desshalb unstatthaft sein, weil die Voraussetzung normaler Gradwerthe selbst für die kleinen Strecken r_1, r_2, etc. nicht mehr zutrifft. — Wenn nämlich r_1 auch an einer Stelle sehr klein wird, so können alsdann doch an andern die entsprechenden r_2, r_3 u. s. w. bedeutendere Werthe, ja selbst mehre Grade erhalten, und die Fehler, die hiedurch entstehen, summiren sich, wie aus obiger Darstellung erhellt, so dass die Verbesserungen unsicher werden.

IV. Egen's Methode.

Sowohl die Beobachtungen als die Rechnungen sind in dieser Methode sehr weitläufig, und aus mehren Gründen glaube ich eine genaue Darlegung derselben übergehen zu dürfen. Sie ist ausführlich in Poggendorffs Annalen [1]) aufgenommen, also Jedermann leicht zugänglich. Egen selbst legt mehrfach ein nicht gerade günstiges Zeugniss über ihren Werth ab; so bemerkt er (Seite 530), er ziehe der Besselschen die seinige vor, weil jene „zu sehr weitschichtigen Rechnungen führe", diese dagegen „fast gleiche Genauigkeit mit der Besselschen gewähre". Ueberhaupt wird sie aber bloss in dem Falle anwendbar, wenn mit Hülfe einer weitläufigen Voruntersuchung sich gleich lange Strecken entdecken lassen. Später theilt Egen mit [2]), dass bei vier von acht Thermometern seine Methode ihm nicht mehr genügt habe, so dass er ein anderes Verfahren hat einschlagen müssen, welches noch umständlicher erscheint. Zu alledem kommt, dass in der Voruntersuchung Fäden von drei Grad verschoben werden müssen, (s. p. 533 oben) was, wie früher erwähnt, fast niemals ausführbar ist. All die angeführten Gründe dürften genügen, um von dieser Methode ganz abzusehen; auch finde ich nirgends bei anderen Forschern dieselbe angewandt. Vor Allem aber muss gerügt werden, dass, ähnlich wie in der Gay-Lussacschen Methode, sich die Fehler häufen. Zwar versichert Egen [3]), dieses könne nur in geringem Maasse der Fall sein; allein er bestimmt nicht die Grösse des möglichen Fehlers. Bemerken muss ich noch, dass nachdem die Möglichkeit nachgewiesen worden, auch die Beobachtungen für die Besselsche Rechnungsart, durch mehrfache Ablesungen herzustellen, (s. Seite 44), der Vorwurf Egens (Seite 532 sein. Abh. in Bd. 11), es könne leicht derselbe Schätzungsfehler bei mehrmaligem Ablesen begangen werden, ganz und gar ungerechtfertigt erscheint.

Auf die namhaften anderweitigen Verdienste Egens, für die Bestimmung des Gefrier- und Siedepunktes, kommen wir sogleich zurück.

---

1) Bd. 11, p. 329.
2) Pogg Ann. Bd. 13 p, 46
3) Pogg. Ann. Bd. 11 p. 536

Dritter Theil.

Beobachtung der festen Skalenpunkte und Correktion wegen der Ausdehnung des Glases.

I. Bestimmung des Gefrierpunktes.

1. Es ist einleuchtend, dass die Beobachtung der festen wie die aller übrigen Punkte um so genauer sein wird, je länger die Grade der Skale sind; wir dürfen jetzt von der hiedurch bedingten Genauigkeit der Ablesung absehen, da dieselbe für ein jedes Thermometer verschieden ist.

Bekanntlich benutzt man zur Bestimmung des Null-Punktes die Temperatur des schmelzenden Schneees. Dreierlei Umstände sind aber hier zur Vermeidung von Fehlern zu berücksichtigen:

1) Die Stellung des Thermometers;
2) Die Zeit, die seit der Verfertigung vergangen und die Temperatur, welcher eine gewisse Zeit lang vorher das Thermometer ausgesetzt war;
3) Die Beschaffenheit der schmelzenden Schneemasse.

In Betreff des ersten Punktes ist daran zu erinnern, dass die meisten Thermometer in vertikaler Stellung einen anderen Stand zeigen, als in horizontaler Lage. Sowohl bei Bestimmung des Gefrier-, als besonders des Siedepunktes ist daher dieser Umstand zu berücksichtigen. Auf dem Observatorium zu Kew wird für jedes Thermometer eine doppelte Correctionstabelle geliefert; die eine für die Beobachtung in vertikaler Stellung, die andere für die horizontale Lage [1]). — Wenn die Länge der Quecksilbersäule in horizontaler Lage = l, so tritt für eine Neigung des Thermometers = φ eine Depression auf = a. l. sin φ. Dieses ergaben die sehr sorgfältigen Versuche von Egen [2]). Dem absoluten Werthe nach war die Depression bei verschiedenen Thermometern eine andere, je nach der Glasdicke der Kugel; also der Werth von a individuell verschieden.

Bei sehr dünnwandigen Kugeln übte auch der Barometerstand einen merklichen Einfluss aus. Die Temperatur des Gefrierpunktes kann als unabhängig vom Barometerstande innerhalb weiter Grenzen [3]) angesehen werden, nicht aber der Ort desselben auf der Skale, weil das Volumen der Kugel je nach äusserem Drucke sich um ein Weniges ändert.

Ein fein gearbeitetes in zehntel Grade getheiltes Normalthermometer, welches Herr Prof. Schmidt mir freundlichst zu Gebot stellte, zeigte in der That, bei hohem Barometerstande einen höheren Gefrierpunkt:

---

1) Rep. of Arit. Assoc. 1853. 2. p. 34

2) Pogg. Ann. Bd. 11. p. 351, besonders aber Bd. 13. pag. 41.

3) Nach W. Thomson's experimentellen, J. Thomson's und R. Clausius's theoretischen Untersuchungen beträgt für einen Druck von 8,1 Atmosphären die Depression des Nullpunktes — 0,06 Grad, also für 760^{mm} Druckunterschied die Nullpunktsänderung — 0,00733. (s. W. Thomson (Phil. Mag. 1850. Vol. XXXVII p. 123 und Pogg. Ann. Bd. 81. pag. 163; J. Thomson (Proc. of the Roy. Soc of Edinb. 1850); Clausius (Pogg. Ann. Bd. 81. pag. 168).

	beim Barometerstande	Gefrierpunkt
am 11. Nov. 1865.	739 mm	+0,43
am 18. Nov. 1865.	769 mm	+0,45

Dass der veränderte Luftdruck die einzige Ursache war, davon überzeugte ich mich durch direkte Versuche: Ich brachte das oben gedachte (I), das früher berechnete (II), und noch ein drittes Thermometer (III) unter die Luftpumpenglocke, und beobachtete für das Thermometer I bei einer Druckverminderung von 27 Zoll und 6 Linien eine Aenderung von 0,37 C. im Mittel aus mehreren Versuchen. Das Thermometer III gab für dieselbe Druckverminderung eine Depression von 0,27 C.

Mit meinem Normalthermometer erhielt ich folgende Werthe, beiläufig bei einer Zimmertemperatur von 17° C.

Nummer des Versuches.	Verminderung des Thermometerstandes	bei einer Druckverminderung von
1	0,29	27,5 Zoll
2	0,28	27,5 „
3	0,30	27,5 „
4	0,20	17,3 „
5	0,22	22, „
6	0,16	16, „

und nach Erhitzung des Thermometers bis 100° C.

7	0,21	19,5 Zoll
8	0,26	25,5 „
9	0,24	20,5 „
10	0,29	27,5 „

Diese Versuche bestätigen unmittelbar die Resultate Egen's: Die Depressionen sind der Druckverminderung proportional. Nimmt man 60 Millimeter oder 2 Zoll als Maximum der Schwankungen des Luftdruckes an, so wäre ein Correctionsglied von höchstens 0,02 Grad bei den Angaben des in Rede stehenden Thermometers zu berücksichtigen. Gestattet ein Thermometer die Ablesung von tausendstel Graden, so dürfte diese Correctionsgrösse niemals vernachlässigt werden, und sämmtliche Beobachtungen wären auf einen normalen äusseren Druck von etwa 760 mm zu reduciren.

Bei vertikaler, oder überhaupt stets gleicher Stellung des Thermometers bedingt die Höhe der Quecksilbersäule in der Thermometerröhre an ein und demselben Beobachtungspunkte keine Correktion, da die Zunahme dieser Säule zwischen 0 und 100 wohl bei allen Thermometern proportional der Temperatur sein wird, weil die Gradstrecken nahezu gleich gross sind.

Dass die oben verzeichneten Depressionen lediglich Folge der Druckverminderung und nicht etwa einer Temperaturschwankung waren, bewies ein viertes Thermometer, an dessen oberem Röhrenende die Spitze abgebrochen war. Jede Druckänderung blieb auf dasselbe ohne Einfluss. Vor dem Abbrechen der Spitze aber zeigte sich an diesem mit einer willkürlichen Skale verbundenen Thermometer für eine Atmosphäre Druckverminderung ein Sinken des Quecksilbers von 4 mm, und fast genau eben so viel bei plötzlichem Abbrechen der Spitze. Es muss demnach für Temperaturbeobachtungen unter der Luftpumpenglocke ebenso, wie auf höheren Bergen allemal der jeweilige Druck b berücksichtigt werden, durch ein additives Cor-

rectionsglied $\frac{b^{mm}}{760}$ a, wo a eine für jedes Thermometer individuelle Constante bedeutet [1]). Dasselbe gilt für das Höhenmessen durch Siedepunktsbestimmungen.

2. Der zweite oben angeführte Punkt bringt auch in theoretischer Hinsicht namhafte Schwierigkeiten mit sich. Es ist eine längst bekannte Thatsache [2]), dass der Nullpunkt namentlich in der ersten Zeit nach der Verfertigung des Thermometers steigt, in Folge einer allmäligen Contraktion der Glasmasse. — Es ist bisher nicht bestimmt ermittelt, wie viel Jahre von der Zeit der Verfertigung des Thermometers an diese allmälige Contraktion fortdauert [3]). Schon desshalb ist von Zeit zu Zeit der Gefrierpunkt von neuem zu bestimmen. — Das Schlimmste aber ist, dass jedesmal, nachdem das Thermometer erwärmt worden, der Nullpunkt wieder niedriger erscheint, in Folge einer Ausdehnung der Glaskugel, die zuweilen mehre Wochen andauert, nach welcher Zeit der Nullpunkt wieder auf den früheren Stand zurückkehrt [4]). Egen verdanken wir die sorgfältigsten Untersuchungen über diesen Gegenstand [5]). — Eine constante Erniedrigung nach dem Erhitzen war keineswegs zu beobachten. Egen [6]) fand dieselbe verschieden, je nach der Geschwindigkeit der Abkühlung, und zwar um so bedeutender [7]) je dicker die Glaswände der Thermometerkugeln waren. — Wurde der Gefrierpunkt einen Tag nach dem Experiment wieder untersucht, so zeigte er sich bisweilen unverändert, ein anderes mal aber erhöht [8]). In wenigen Tagen war stets ein Steigen wahrnehmbar. — Egen beobachtete Depressionen nur nach einer Erwärmung bis 100° C.

Es tritt aber eine Verrückung des Nullpunktes auch dann ein, wenn die Thermometer niedrigeren Wärmegraden ausgesetzt werden. Henrici [9]) erhielt folgende Zahlen, indem er ein fein gearbeitetes Thermometer den verzeichneten Temperaturen aussetzte, und unmittelbar nachdem dasselbe in schmelzenden Schnee einsenkte:

Erwärmung.	Stand im Schnee.
50° C.	0°.0
60	— 0 .1
80	— 0 .25
90	— 0 .4
100	— 0 .6

Der Einfluss der Erwärmung, schliesst Henrici, steigt, je höher die absoluten Temperaturen.

---

1) Für die mittleren Temperaturen hochgelegener meteorologischer Stationen dürfte hieraus ein beträchtliches Correctionsglied erwachsen, welches für Orte, wie Rigi, St. Bernhardt u. a. selbst ein zehntel Grad übersteigen könnte. Schon für St. Peter, Lölling, Gastein und St. Jacob, die höchstgelegenen Orte des Oesterreichischen Beobachtungsgebietes, deren barometrisches Jahresmittel gegen 300 Linien, (wie ich aus den von dem Herrn Dr. Jelinek mir freundlichst übersandten „Uebersichten der Witterung in Oesterreich etc." ersehe), — betrüge die Correction, wenn die Thermometer in Wien regulirt werden, gegen + 0,03 Grad.

2) Wie Rudberg (Pogg. Ann. Bd. 40. pag. 44) behauptet, war Bellani der erste, der dieses beobachtet hat. Ich habe die bezügliche Arbeit nicht nachsehen können: Giornale di fisica di Pavia 1822: „Del incertezza del determinare il punto del ghiaccio."

3) Despretz (Institut 1837. Nr. 199 pag. 73, Nr. 218. pag. 251 und Ann. de chim. et de phys. T. 64 pag. 316) behauptet, die Verrückung dauere fünf Jahre, Egen (Pogg. Ann. Bd. 11. pag. 347) giebt mehr als drei Jahre an.

4) Auch Faraday thut dieser Erscheinung Erwähnung in seiner „Chemical Manipulation," wie ich aus einem Citat von Welsh ersehe (Phil. Mag. 4. ser. 1852. Nr. 22, pag. 309)

5) Pogg. Ann. Bd. 13, pag. 33.

6) Pogg. Ann. Bd. 13, pag. 38.

7) Pogg. Ann. Bd. 11, pag. 357. Welsh giebt im Maximo 0.3 Grad Fahr. an (Phil. Mag. 4. 1852. p. 309).

8) Pogg. Ann. Bd. 11, pag. 355.

9) Pogg. Ann. Bd. 50, pag. 251.

3. Es fragt sich nun, welchen Punkt man als Gefrierpunkt bei irgend einer Temperaturbestimmnng anzunehmen habe? Die Ansichten hierüber lauten sehr verschieden: Henrici, a. a. O., meint, man solle bei der Graduirung der Thermometer „zuerst den Siedepunkt derselben, und unmittelbar nach diesem den Nullpunkt bestimmen, sodann aber vor einer jeden wichtigeren Anwendung der Thermometer dieselben jedesmal auf 100° C. erwärmen, um sie dadurch wieder in ihren ursprünglichen Zustand zu versetzen."

Dagegen macht Muncke [1]) darauf aufmerksam, dass die unmittelbar vor einer Beobachtung gefundene Abweichung des Gefrierpunktes nicht allen Graden als constante Grösse hinzugefügt werden könne, da, wie er meint, „der Theil des Fehlers, welcher aus der Zusammenziehung des Glases folgt, mit zunehmender Wärme abnehme und im siedenden Wasser gänzlich zu verschwinden scheine. Gelte aber dieses als richtig, so sei es unmöglich, den Fehler des Gefrierpunktes völlig genau zu corrigiren, weil man nicht wisse, wie weit derselbe bei jeder Beobachtung durch vorausgegangene Erwärmung des Thermometers bereits verschwunden sei." Dieser Einwand scheint in der That berechtigt. Es könnte wirklich bei allen höheren Temperaturangaben eine Unsicherheit zurückbleiben, deren Grund in dem Moment zu suchen wäre, dass die Ausdehnung des Quecksilbers nicht auf ein bestimmtes Anfangsvolumen bezogen werden könne. Eine sichere Antwort scheint, wie wir sehen werden, nach den bisherigen Kenntnissen nicht möglich.

Durch mannichfach veränderte Versuche ist es ebensowenig gelungen, das Maass dieser Verrückung, wie ihre Ursache sicher festzustellen. Egen sagt hierüber folgendes: „Ob die Masse des Quecksilbers, oder die Dicke der Kugelwände, oder das Verhältniss der Weite der Kugel zur Weite der Röhre einen Einfluss ausüben, stellte sich nicht bestimmt heraus. Einige Thermometer, welche die dicksten Kugelwände hatten, erlitten ein paar Mal die stärkste Erniedrigung des Aufthaupunktes." — Dagegen bemerkte er, dass die Veränderungen um so bedeutender waren, je grösser die Temperaturänderungen, und je plötzlicher dieselben eintraten. In diesem Falle, meint er weiter, entstehe eine Sprödigkeit des Glases, welche ihren Grund in der ungewöhnlichen Spannung der kleinsten Theilchen habe. — Der Luftdruck schien ihm wenig Einfluss zu haben, denn eine nachherige Erhöhung wurde auch an Thermometern beobachtet, wo der äussere Luftdruck durch den inneren aufgehoben war. Die Erscheinung liesse sich am ungezwungensten erklären durch eine Sprödigkeit des Glases, welche nachher ein Zurückgehen der gespannten Theilchen in die natürliche Lage [2]) zur Folge habe.

Recknagel [3]) in München hat neuerdings Egen's Resultate bestätigt, und er warnt vor jeglicher Nullpunktsbestimmung unmittelbar nach einer stärkeren Erwärmung. Nach seinen Versuchen tritt der normale Nullpunkt schon nach einem Tage, zuweilen noch früher, wieder ein. Mit Rücksicht auf Henrici's Versuche schreibt er:

„Man wird sowohl die Folge

Siedepunkt — Nullpunkt — Messung,

welche von Henrici vorgeschlagen ist, als die andere

Siedepunkt — Messung — Nullpunkt

vermeiden, und vielmehr die Siedepunktskontrolle erst nach der Messung vornehmen. Findet man vor und nach der Messung den Nullpunkt an derselben Stelle, während man die gemessene Temperatur selbst mittelst des durch die folgende Siedepunktsbestimmung ermittelten Intervalles rechnet, so wird man jeden Grund eines Zweifels in eine normale Temperaturbe-

---

1) Gehler's Wörterbuch 1839 Artikel: Thermometer. pag. 932.

2) Pogg. Ann. Bd. 11, pag. 364 u. ff. Aehnliche theoretische Spekulationen sind oft ausgesprochen worden. So u. A. von Sheepshanks (Monthly Notices of the Roy. Astron. Soc. Vol. XI. 1851. pag. 245). — Nachträglich erwähne ich, dass in dieser Abhandlung eine Kalibrirmethode entwickelt wird, die ganz identisch ist mit der Rudberg's. Auch Bessel's Methode hat Sheepshanks angewandt. Die Erfahrungen, die über das Abtrennen der Quecksilberfäden mitgetheilt werden, stimmen ganz mit unseren Angaben (Seite 46) überein.

3) Pogg. Ann. Bd. 123, pag. 132.

stimmung vermieden haben." In einer 1843 veröffentlichten Arbeit kommt Pierre [1]) zum entgegengesetzten Resultat.

Regnault [2]) wiederum berechnet die Gradwerthe in der Art wie Henrici, und ihm sind darin gefolgt Martins, Bravais [3]) und Izarn [4]).

Endlich sind auch von Despretz [5]) sehr sorgfältige Beobachtungen angestellt, die aber ebensowenig, wie die übrigen bisher angeführten Versuche die Frage erschöpfend beantworten.

4. In Gehler's Wörterbuch an der citirten Stelle fand ich eine Bemerkung Muncke's, die mich zu weiterer Verfolgung der Frage anregte. Er schreibt die Depressionen nach der Erhitzung, mit Egen, einem Spröde-werden des Glases zu, und bemerkt hiebei: „Beim Glase ist besonders zu berücksichtigen, dass seine Sprödigkeit in einer dem Gefrierpunkte nahen Temperatur ausnehmend wächst, und die an den Thermometerkugeln wahrgenommene Zusammenziehung mag daher wohl nahe über dem Gefrierpunkte erst beginnen."

Nach dieser Ansicht dürfte eine Depression nicht wahrgenommen werden, wenn nach einer Erhitzung des Thermometers dasselbe nachher plötzlich auf mässige Temperaturen erkaltet würde.

Die drei oben genannten Thermometer brachte ich an einem Gestell so an, dass die Kugeln neben einander in einem Gefäss mit Wasser von 17° C. sich befanden, und verzeichnete den Stand des Quecksilbers. — Während nun das eine (I) unverändert stehen blieb, wurden die beiden anderen verschiedenen Temperaturen (in erwärmtem Wasser) ausgesetzt, dann in einem anderen Gefäss plötzlich bis 17 Grad erkaltet, und wieder in das erste zurückgebracht zum Vergleich mit den Angaben des ruhenden Thermometers.

Die Versuche, bei welchen die Herren Stud. chem. Grönberg und zool. Dercks mir behülflich waren, ergaben folgendes Resultat:

Stand der Thermometer nach einer Erwärmung bis

Thermom.	50°	60°	70°	80°	87°	98°
I	15.85	15.87	15.91	15.91	15.91	15.96
II	15.35	15.37	15.32	15.30	15.22	15.20
III	15.62	15.64	15.64	15.63	15.60	15.60

Daraus ergaben sich folgende Abweichungen vom Thermometer I in 100 stel Graden:

II.	50	50	59	61	69	76
III.	23	23	27	28	31	36

Nach einer nochmaligen Erwärmung bis 98° und langsamer Erkaltung in demselben Gefäss mit Wasser ergab sich die Depression resp. 63 und 36, also für Thermometer I ein Zurücktreten von 0,13°, für das andere keine Veränderung.

Die folgenden Tage ergaben folgende Differenzen vom Thermometer I, während die absolute Temperatur nur wenig schwankte.

Zeit der	3. November 1865.		4. November 1865.				5. November 1865.	
Beobacht:	9h 25′	12h 54′	9h 15′	12b 45′	5h 5′	9h	8h	2h
II	63	61	58	58	57	55	54	53
III	31	31	31	10	8	7	7	6

1) Ann. de chim. et de phys. ser. III T V, pag. 427 und Pogg. Ann Bd. 57, pag. 566.

2) Compt. rend. XX. pag. 163—169. Pogg. Ann. Bd. 65, pag. 361—370.

3) Ebendaselbst.

4) Ebendaselbst.

5) Ann. de chim et de phys. Tome LXIV. 1837. pag 316.

Am 6., 7. und 8. November blieb die Differenz resp. = 0.53 und 0.06. Das Thermometer III stand, wie man sieht, höher als am Anfang der Versuche, offenbar, weil es kurz vor denselben zu Temperaturbestimmungen gedient hatte.

Die angeführten Zahlen lehren, dass eine Depression schon bei einer Erwärmung bis 60° eintritt, auch dann, wenn die nachherige Abkühlung nicht bis 0°, sondern bloss bis 15° geschieht.

Die nachherige Contraktion der Glasmasse ist nicht dieselbe bei beiden Thermometern, sondern sie tritt bei Nr. III vom 3. bis 4. November plötzlich auf. Im Maximo betrug die Depression bei Nr. II 0.26 Grad.

Mit denselben Thermometern hatte Herr Stud. Dercks zwei Wochen vorher eine ähnliche Versuchsreihe über Depressionen des Gefrierpunktes vorgenommen, deren Resultate hier folgen:

	II	III
Nullpunkt nach langer Ruhe	0·00	+0.46
Nach Erhitzung bis 42°	−0.03	+0.45
„ „ „ 50°.4	−0.05	+0.44
„ „ „ 60°.5	−0.07	+0.43
70	−0.10	+0.42
80	−0.19	+0.39
90	−0.27	+0.29
100	−0.33	+0.24
Nach 2 maliger Erhitzung bis 100	−0.39	
Nach 3 maliger Erhitzung bis 100	−0.42	
„ „ „ „ 100	−0.42	
„ „ „ „ 100	−0.42	

5. Da ich nirgends eine bestimmte Ansicht darüber gefunden habe, ob nicht auch schon bei höheren Temperaturen ähnlich wie oben bei 15° eine Depression eintrete, so unternahm ich noch einige Versuche. Ein Thermometer Nr. IV, welches lange Zeit ungebraucht gestanden hatte, unterwarf ich einem Vergleich mit dem früher angewandten Nr. I. Es gestattete dasselbe eine bequeme Schätzung der 100 stel, da jeder Grad, etwa 5 mm lang, in Zehntel getheilt war.

	I	IV	Differenz von I u. IV in 1/100 Grad	Mittel in 1/100 Grad	Abweich. in 1/100 Grd. nach der Red. auf gl. Anfangsz.
Am Anfang der Versuche 19. Nov. 11 Uhr Mo gens	13.42	13.31	−10	−10	0
	33.30	33.81	+51	+51	0
	33.40	33.91	+51		
Nach dem Erhitzen von Therm. IV bis 70 Grad C und plötzlichem Erkalten bis 34 Grad	33.16	33.67	+52	+51	0
Nach dem Erhitzen bis 85 Grad und Erkalten bis 34	33.17	33.66	+49	+48	−3
	33.14	33.64	+50		
	33.12	33.59	+47		
	33.08	33.56	+48		
	33.06	33.52	+46		
	36.03	33.49	+46		
Nach dem Erhitzen bis 100,4 C und Erkalten bis 34°	33.07	33.44	+37	+36	−15
	33.05	33.41	+36		
	33 03	33.39	+36		
	33.00	33.35	+35		
Unmittelbar nach den vorstehenden Versuchen	13.50	13.21	−29	−30	−20
	13.50	13 19	−31		
	13.51	13.21	−30		
Am folg. Tage 20. Nov. 12 U.	13.51	13.27	−24	−24	−14

Trotz der Beobachtungsfehler geht deutlich aus diesen Zahlen hervor, dass ein Thermometer, selbst nach langer Ruhezeit, wenn es bis 85 Grad C. erhitzt wird, schon durch die Abkühlung bis 34° C. eine Depression (von 3 Hundertsteln), bis 100° erhitzt, eine

solche von 15 Hundertstel erleidet, welch letztere Zahl noch durch Abkühlung des Thermometers bis 13,5° um 5 Hundertstel zunimmt.

Ich darf nicht unerwähnt lassen, dass ich manche Versuche angestellt habe, um die durch Erhitzung und nachherige Erkaltung hervorgebrachte Depressionen sofort wieder aufzuheben. Die Grösse der letzteren zeigte sich aber unverändert, nachdem das Thermometer, unmittelbar nach Beobachtung des Gefrierpunktes unter die Glocke der Luftpumpe gebracht und mehrmals Luft aus- und zugepumpt worden war. Ich hoffte andererseits dadurch, dass das Thermometer längere Zeit einem höheren Drucke ausgesetzt wurde, das genannte Ziel zu erreichen. Nach Beobachtung des Gefrierpunktes wurde desshalb das Thermometer in ein weites Glasrohr hinabgesenkt, durch einen Glasstab in der Tiefe festgehalten, und dann 1750 mm hoch Quecksilber in das Glasrohr gegossen. Die Thermometerkugel verblieb so 24 Stunden unter einem Druck von etwa 3,4 Atmosphären. Tages zuvor war der Gefrierpunkt = — 0.29, und nachdem es aus dem Quecksilberrohr herausgenommen war, — 0.19. — Um ebensoviel wäre der Nullpunkt auch dann zurückgekehrt, wie nach anderen Versuchen zu schliessen war, wenn man das Thermometer sich selbst überlassen hätte. — Andererseits brachten Erkaltungen bis — 19° (in einer Kältemischung) und plötzliche Erwärmungen bis 0° keine Aenderung an der kurz zuvor beobachteten Depression hervor [1]).

6. Nach Allem, was zuletzt besprochen, muss bekannt werden, dass die Frage, wie die Thermometerbeobachtungen zu reduciren seien, wenn man unmittelbar nach einander sehr verschiedene Temperaturen zwischen 0 und 100 Grad bestimmen will, noch immer eine offene genannt werden müsse. — Für Temperaturen zwischen 0 und 50 Grad muss ohne Zweifel der nach langer Ruhe des Thermometers beobachtete Nullpunkt genommen werden, wie Recknagel angiebt. Dass aber dieNullpunktsdepression allen Beobachtungen als Constante hinzugefügt werde, scheint, wie Muncke richtig bemerkt, nicht statthaft, denn es treten nicht entsprechende Veränderungen des Siedepunktes auf. Andererseits ist es ebensowenig erwiesen, dass die Depression umgekehrt proportional der beobachteten Temperatur abnehme. — Ja die Thermometer verhalten sich individuell verschieden. — Ich stellte folgenden direkten Versuch an. Es wurde mit den oben genannten Thermometern II und IV, nachdem ihr Nullpunkt bestimmt war, ein Vergleich mit einem dritten Thermometer bei 13°,5 C und einem vierten bei 33°,5 C. angestellt und der Stand notirt. Darauf wurden II und IV der Siedhitze ausgesetzt und plötzlich bis 0° abgekühlt. Darauf ergab der Vergleich mit den ruhenden Thermometern folgende Depressionen in $^1/_{100}$ Graden:

bei 0°	bei 13°,5	bei 33°,5
II — 15	— 13	— 5
IV — 19	— 19	— 17

1) Herr Gieswald a. a. O. Seite 28 stellt den ganzen Sachverhalt verkehrt dar. Er verspricht ein „aus eigener Erfahrung“ gewonnenes „Resumé“ zu geben; in diesem aber ist eine Stelle aus einer Arbeit von Person (Pogg. Ann. 65) wörtlich abgeschrieben, und dann nocheinige Worte hinzugefügt, die als Beispiel dienen mögen, wie oberflächlich die gesammte Compilation ausgeführt ist. Herr Gieswald schreibt mit gesperrter Schrift: „Somit wird die Veränderung in der That auf ein Minimum reducirt werden, wenn man 1) die Graduirung nach Rudberg erst nach längerer Zeit vornimmt, dann 2) das Quecksilber durch künstliche Erkaltung längere Zeit (circa 60 Stunden nach Welsh) taucht und langsam erkalten lässt. Der Nullpunkt verändert sich dann nicht in der Regel, oder die geringere Veränderung bleibt dauernd.“ Kein Versuch, keine Zahl zum Beleg, weder vor- noch nachher. Hiermit vergleiche man aber folgende interessante Stelle des Originals (Rep. of Brit. Assoc. 1853. 2. pag. 35): „Mr. Welsh took about fifteen thermometers, and, after carefully ascertaining their freezing-points, kept them exposed to the temperature of boiling water for about 60 hours, allowing them afterwards to cool very slowly. It was then found that the freezing-point had been permanently raised in all of them by about 0°.3 to 0°.4 Fahr. The effect of a subsequent sudden elevation of temperature was exactly as before, to lower the freezing-point by nearly 0°.2; the reading which was found after the long-continued boiling being again restored in about a fortnight. — Eine Fortsetzung dieser wichtigen Versuche wird beim Schlusse versprochen, — scheint aber später nicht erschienen zu sein. —

Bei dem ersten Thermometer (II) nimmt die Depression rasch ab, bei dem andern erscheint sie constant bei allen Temperaturen. Es erscheint demnach in solchen Fällen kein anderer Ausweg übrig, als der des Vergleiches mit ruhenden Thermometern.

Nach Regnault sind die Depressionen am geringsten bei Thermometern aus Krystallglas. Es findet bei diesen im Maximo eine Aenderung von 0.05 Grad, während gewöhnliche Thermometer oft eine solche von 0.5 Grad zeigten [1]).

7. Schliesslich muss noch bemerkt werden, dass bedeutende und zwar bleibende Erhöhungen des Nullpunktes auftreten, wenn man die Thermometerkugeln längere Zeit Temperaturen von 300 Grad und mehr aussetzt. — Person [2]) theilt hierüber ausführliche Versuche mit: Lufthaltige Thermometer bei 440° C. (bei starkem inneren Druck erreichbar) angelassen, zeigten Erhöhungen von 15 bis 17 ganzen Graden. — Person hat keine Nullpunktsbeobachtungen mit solch „augelassenen" Thermometern nach plötzlicher Erwärmung und Abkühlung angestellt, doch spricht er eine Vermuthung aus, die hier nicht übergangen werden darf, da möglichenfalls sich dadurch ein Mittel darbieten könnte, die in Rede stehenden Uebelstände zu vermindern. Er schreibt: „Da die Contraktionen und Dilatationen des Glases nach dem Anlassen weit regelmässiger sind, so ist es sehr möglich, dass man keine Senkung des Nullpunktes mehr beobachten, und somit, da keine Erhöhung stattfindet, einen nahezu festen Punkt haben werde, wenigstens wenn man plötzliche Temperaturänderungen vermeidet. Das ist eine noch zu studirende Aufgabe." Warum Person sie nicht studirt, ist nicht recht verständlich, da er doch viele in der besprochenen Art behandelte Thermometer besass. Wenigstens hätte sich der Einfluss plötzlicher Abkühlungen von 100 bis 0° leicht feststellen lassen.

Was endlich den dritten Punkt betrifft, der bei Fixirung des Gefrierpunktes zu berücksichtigen ist, so wird es genügen auf die Untersuchung von Egen [3]) hinzuweisen, die folgendes Resultat ergaben: „Die Temperatur des Schneees hängt so lange von mancherlei äusseren Umständen ab, bis die Schmelzung in ihm anfängt sichtbar zu werden, das heisst, wo er in Körnern durchscheinend wird. Von da an bis zu dem Punkte, wo er mit Wasser durchzogen wird, ist seine Temperatur constant."

Ohne Einfluss auf den Gefrierpunkt waren nach Egen 1) das Gefäss, in welchem der Schnee enthalten 2) der Barometerstand innerhalb 15 Linien Schwankung (?) 3) die Beschaffenheit des Schneees, wenn er nur rein war. — Letztere Bedingung ist wichtig, da ein geringer Salzgehalt schon den Gefrierpunkt herabdrückt [4]). — „Sonst mag der Schnee frisch gefallen, körnig oder anderswie beschaffen sein, der Aufthaupunkt bleibt derselbe." — In Ermangelung von Schnee darf auch reines fein zerstossenes Eis angewandt werden.

II. Bestimmung des Siedepunktes.

Bei der Bestimmung des Siedepunktes sind wiederum dreierlei Bedingungen zu berücksichtigen:

1) Die Lage des Thermometers;
2) Der Barometerstand;
3) Die Beschaffenheit des Wasserdampfes.

Der erste Punkt war schon früher erörtert. Es ist der Stand des Thermometers abhängig vom äusseren und vom inneren Drucke auf die Kugelwände. Es muss daher eine

---

1) Compt. rend. XX. pag. 163 und Pogg. Ann. Bd. 65. pag. 362 — Pierre behauptet das Gegentheil (Pogg. Ann. Bd. 57. pag. 566); wenigstens findet er die Schwankungen für die Grösse des Intervalles zwischen 0° und 100° grösser beim Krystall-, als beim gewöhnlichen Glase. (Ann. de ch. et de ph. 1842. T. V p. 448).

2) Compt. rend. XIX. pag. 1314. Pogg. Ann Bd. 65. pag. 370—373. Siehe auch Despretz in den Ann. de Chim. et de phys. LXIV. 1837. pag. 316 Noch frühere Versuche von Legrand (Institut. Nr. 195 pag. 38. 1837).

3) Pogg. Ann. Bd. 11, pag. 337.

4) Despretz schreibt (Ann. de chim. et de phys. T. 64, pag. 318): „le zéro, que fournit la glace de Gentilly est absolument le même que le zéro qu' on obtient avec la glace formée par de l'eau distillée, comme je m'en suis assuré.

scheinbare Erhöhung des Siedepunktes in horizontaler Lage statthaben, welche einmal von der Länge der Quecksilbersäule, dann auch von der Beschaffenheit der Kugelwände abhängt, und in jedem Falle leicht beobachtet werden kann mit Hülfe eines Gefässes, wie Egen[1]) es angiebt.

2. Die Dämpfe haben beim Sieden bekanntlich eine dem atmosphärischen Drucke gleiche Spannkraft. Um also einen festen Temperaturpunkt zu gewinnen, bestimmt man nach Tafeln, welche die Beziehung zwischen Spannkraft und Temperatur angeben, die für den Siedepunkt anzubringende Correktion. Wenn das Thermometerkaliber in der Nähe des Siedepunktes ungleich, so darf streng genommen nicht der Siedepunkt auf 760 mm Barometerstand reducirt werden, sondern man entnimmt die für den wirklich beobachteten Siedepunkt nothwendige Verbesserung aus den Tafeln.

Wenn die Grössen e und s bei einem auf 0 Grad reducirten Barometerstand b beobachtet sind, während die Tabelle der Spannkraft einen Siedepunkt k ergiebt, so wird der verbesserte Gradwerth

$$g = k \frac{(x + \varphi x - e + \varphi e)}{(s + \varphi s - e + \varphi e)}$$

Man rechnet am einfachsten die endgültigen Verbesserungen aus, wenn man die Kaliberkurve parallel mit sich selbst um solch ein Stück verschiebt, dass $e + \varphi' e = o$ wird. Alsdann ist $G = \frac{k}{s + \varphi s} (x + \varphi x)$, in welcher Gleichung φs und φx um $e + \varphi e$ vermindert sind. Zunächst folge hier eine Tabelle zwischen Siedepunkt und Spannkraft der Dämpfe nach Regnault, die den Ann. de chim. et de phys. ser. III. T. XIV. p. 206 entnommen ist. Die von Magnus erhaltenen Werthe für die Spannkraft weichen zwischen 98 und 102 Grad von den Regnault'schen um weniger als 0,2 mm ab.

Temp	Spannkr.	Differenz für 0°.1	Temp.	Spannkr.	Differenz für 0°.1
97.0	682.03		99.0	733.21	
		2.49			2.64
1	84.52	2.50	1	35.85	2.65
2	87.02	2.51	2	38.50	2.66
3	89.53	2.51	3	41.16	2.67
4	92.04	2.52	4	43.83	2.67
5	94.56	2.52	5	46.50	2.68
6	97.08	2.53	6	49.18	2.69
7	99.61	2.54	7	51.87	2.70
8	702.15	2.55	8	54.57	2.71
9	04.70	2.56	9	57.28	2.72
98.0	07.26	2.56	100.0	760.00	2.73
1	09.82	2.57	1	62.73	2.73
2	12.39	2.58	2	65.46	2.74
3	14.97	2.59	3	68.20	2.75
4	17.56	2.59	4	70.95	2.76
5	20.15	2.60	5	73.71	2.77
6	22.75	2.60	6	76.48	2.78
7	25.35	2.61	7	79.26	2.78
8	27.96	2.62	8	82.04	2.79
9	30.58	2.63	9	84.83	2.80
			101.0	87.63	
			102.0	816.07	

Für das Geissler'sche Normalthermometer folge hier die ganze Rechnung für Abscissen von 5 zu 5°. —

Nach langer Ruhe des Thermometers wurde $e = + 0.21$ beobachtet. Die Fig. 1 Taf. V giebt $\varphi e = - 0.15$. Daher wird sämmtlichen Ordinaten ein Stück $= - 0.06$ hinzugefügt.

---

1) Pogg. Ann. Bd. 13 Taf. 3 Fig. 1.

Der Siedepunkt war bei 750 mm, 07 Barometer (0°) beobachtet und s = 99°, 46 gefunden worden.

Also nach Fig. 1 Taf. V $\varphi 99,46 = +0.015 - 0,06 = -0.045$.

Die vorstehende Tabelle giebt für 750, 07 Barometer 99°, 6 +

$$\frac{750,07 - 749.18}{2,69} . 0^{\circ}.1 = \frac{0.89}{2,69} . 0^{\circ}.1 = 0^{\circ},033$$

also k = 99, 633

und $s + \varphi s = 99^{\circ},46 - 0^{\circ},045 = 99^{\circ},415$. Daraus folgt

$$\log \frac{k}{s + \varphi s} = 0,00095$$

a. x.	b. $x + \varphi x - (e + \varphi e)$	c log. b.	d. log. b + log. $\frac{k}{s+\varphi s}$	e. Num. d = verbess. Gradw.
— 10	— 10.210	1.00903	1.00998	— 10.232
— 5	— 5.190	0.71517	0.71612	— 5.201
0	— 0.210	0.32222 — 1	0.32317 — 1	— 0.210
+ 5	+ 4.784	0.67979	0.68074	+ 4.794
10	9.780	0.99034	0.99129	9.801
15	14.781	1.16970	1.17065	14.813
20	19.798	1.29662	1.29757	19.841
25	24.852	1.39536	1.39631	24.906
30	29.886	1 47547	1.47642	29.952
35	34.915	1.54301	1.54396	34.991
40	39.944	1.60145	1.60240	40.032
45	44.969	1.65291	1.65286	45.068
50	49.998	1.69895	1.69990	50.108
55	55.001	1.74037	1 74132	55.122
60	59.985	1.77804	1.77899	60.116
65	64.952	1.81259	1.81354	65.094
70	69.898	1.84446	1.84541	70.051
75	74.846	1.87417	1.87512	75.010
80	79.875	1.90241	1.90336	80.050
85	84.905	1.92893	1.92988	85.091
90	89.953	1.95401	1.95496	90.150
95	93.955	1.97752	1.97847	95.163
100	99.958	1.99982	2.00077	100.177

3. Nach Gay-Lussac's Entdeckung ist die Temperatur des siedenden Wassers von der Beschaffenheit des Gefässes abhängig. Rudberg dagegen fand, dass, trotz der inconstanten Temperatur des Wassers, die des Wasserdampfes bei ein und demselben Drucke fest bestimmt sei, unabhängig von dem Wärmegrade des überhitzten Wassers, selbst dann, wenn Salz in dem letzteren enthalten [1]). —

Marcet [2]) bestätigt die von Gay-Lussac und anderen mitgetheilte Erfahrung über die verschiedene Erhöhung der Siedepunkte je nach dem angewandten Gefäss. Er findet aber, dass nicht bloss die Temperatur des siedenden Wassers, sondern auch die des Dampfes veränderlich sei, und zwar in hohem Grade, wenn das Wasser Salz in Lösung enthalte. Der Unterschied beider Temperaturen war am kleinsten, wenn metallene Gefässe angewandt wurden, und fast Null, wenn die letzteren, einerlei ob aus Glas oder Metall inwendig mit einer Substanz (Schwefel oder Schellack) in dünner Schicht ausgekleidet waren, die die Adhäsion des Wassers an die Gefässwände verhütete. — Da die Temperaturangaben durch die strahlende Wärme einer unter dem Thermometer befindlichen wärmeren Flüssigkeit beeinflusst werden

1) Pogg. Ann. Bd 34. p 268.

2) Ann. de chim. et de phys. 1842 T. V pag: 449.

können, so suchte Marcet, zur Bestimmung eines festen Punktes, den Versuch so einzurichten, dass die Temperaturen des Dampfes und der Flüssigkeit dieselben seien. Es folgen hier einige der von ihm gefundenen Zahlen, wie sie als Mittel aus vielen Versuchen sich ergaben. Die Temperatur des in einem Metallgefässe siedenden Wassers (nicht die des Dampfes) nennt Marcet 100°. Demnach war im Mittel:

Gefäss	Inhalt des Gefässes	Temperatur	
		der Flüssigkeit	des Dampfes
Metall-	destillirtes Wasser	00°	99°.84
Glaskolben	destillirtes Wasser	100°,95	99°.89
Glaskolben	destillirt. Wasser mit Eisenhammerschlag	100°,26	99°.89
Metallgefäss	mit 7% Salz im Wass.	101°,25	101°
Dasselbe	„ 10% „ „	101°,70	101°.45
Dasselbe	„ 25% „ „	104 ,45	104°.20
Glaskolben	mit 7% Salz im Wass.	101°,75	101°,10
Glaskolben	„ 10% „ „	102 ,35	101 .54
Glaskolben	„ 25% „ „	105°	104 .50
Glaskolben mit Eisenhammerschlag	mit 7% Salz im Wass	101 .45	101°,12
	„ 25% „ „	104°.70	104°.40
Metall	Alcohol	78.50	78.35
Glaskolben	Alcohol	79.20	78.40
Dasselbe mit Eisenhammerschlag	Alcohol	78.75	78.33
Glaskolben innen mit Schwefel ausgekleid.	destillirtes Wasser	99.85	99.85
Ders. mit Gummilack	destillirtes Wasser	99. 7	99. 7
Metall innen mit Gummilack	destillirtes Wasser	98. 8	99. 8

Die letzten drei Zahlen beweisen, dass die Temperatur des siedenden Wassers unter den obwaltenden Umständen selbst unter diejenige herabsinken kann, die in einem reinen Metallgefässe beobachtet wird. — Erst in neuerer Zeit ist durch Magnus [1]) der Widerspruch zwischen Marcet's und Rudberg's sorgfältigen Versuchen aufgeklärt worden. Es waren nämlich bereits von Wüllner [2]) die Beziehungen zwischen der Spannkraft der aus kochenden Salzlösungen entweichenden Dämpfe zur Temperatur der Flüssigkeit festgestellt worden, denen gemäss unzweifelhaft der Siedepunkt mit dem Prozentgehalt an Salz zunahm. Unentschieden blieb es aber immer noch, ob auch die Dämpfe selbst eine höhere Temperatur besässen. Von der von Regnault ausgesprochenen Ansicht ausgehend, dass die erwähnten Beobachtungen Rudberg's darin ihren Grund hätten, dass die Thermometerkugel beständig von verdichtetem Wasserdampf benässt sei, ersann (wie Magnus mittheilt) Rüdorff ein einfaches sinnreiches Mittel, diesem Uebelstande zu begegnen. Er erwärmte das Thermometer vor dem Versuch bis zu einer Temperatur, die diejenige der siedenden Flüssigkeit übertraf, und senkte es dann erst in den zu untersuchenden Dampf. Mit Umgehung vieler Schwierigkeiten gelang es Magnus durch ein solches Verfahren nachzuweisen, dass unzweifelhaft die Temperatur des aus Salzlösungen entweichenden Dampfes bedeutend 100° übersteigen könne, also stets in einem überhitzten, und niemals im gesättigten Zustande sich befinde. Um sicher zu gehen, wird man desshalb zur Bestimmung des festen Thermometerpunktes nur des destillirten Wassers sich bedienen dürfen. Ob man besser thut, die Temperatur des Dampfes, wie seit langer Zeit allgemein geschieht, oder die des Wassers zu nehmen, kann gegenwärtig keinem Zweifel unterliegen. Durch die vorstehend mitgetheilten Versuche von Marcet ersieht man zwar, dass auch

1) Pogg. Ann. 112, pag. 408.

2) Pogg. Ann. Bd. 103, 105 und 110.

die Temperatur des Dampfes, je nach der Beschaffenheit des Gefässes, verschieden ist, allein in weit geringerem Maasse als die des Wassers. Magnus theilt darüber keine Versuche mit, ob ebenso, wie bei der Untersuchung der Salzlösungen, auch dann eine Erhöhung der Dampftemperatur bei seiner Anordnung des Experimentes wahrgenommen werde, wenn man destillirtes Wasser in das Gefäss bringt.

Ganz besonders instruktiv sind neuere Versuche von Dufour [1]) über Siedverzüge, welche er bei ein und demselben Gefäss beobachtet hat. Das längst bekannte Mittel, das Sieden in Glasgefässen dadurch zu befördern, dass feinzertheilte Metallstücke in das Wasser gethan werden, fand Dufour unwirksam, wenn der Versuch mehremal hinter einander angestellt wurde, und die Metalltheilchen in ein und demselben Wasser verblieben. Er fand ferner, dass auch in Metallgefässen unter ähnlichen Umständen das Sieden bei immer höheren Temperaturen begann, je häufiger das Experiment vorgenommen wurde. Solch ein Siedverzug konnte indess dadurch vermieden werden, dass man einen galvanischen Strom durch die kochende Flüssigkeit leitete, durch welchen das Wasser an den Elektroden sich zersetzte. Unter allen Umständen verursachten jetzt die elektrolytisch erzeugten Gase ein sofortiges Sieden; wie es scheint, aber bloss in unmittelbarer Nähe der Elektroden.

Eine bedeutende Temperaturerhöhung des siedenden destillirten Wassers brachte Marcet dadurch hervor, dass er die Glasgefässe, die er anwandte, vorher mit Schwefel- oder Salpetersäure reinigte. Dasselbe gelang Magnus [2]) mit einer Platinschaale, die er mit schmelzendem kaustischen Kali und nachher mit Schwefelsäure behandelte.

Da es bei der vorliegenden Frage hauptsächlich darauf ankommt, einen festen Punkt zu gewinnen, so scheint es nach Allem, was wir angeführt, am rathsamsten, ein Metallgefäss zu nehmen, das längere Zeit an der Luft gestanden hat oder — da es oft wünschenswerth ist, den Vorgang im Innern des Gefässes zu übersehen — einen Glascylinder mit metallischem Boden und Deckel. Wenn auch das siedende destillirte Wasser eine höhere Temperatur als der Dampf hat, so ist dieser Unterschied doch gering.

4. Die Schwankungen, die bei anscheinend ganz gleich angestellten Versuchen beobachtet worden sind, scheinen nach den Angaben verschiedener Physiker noch beträchtlich. Egen [3]) erhielt im Maximum als Abweichung vom Mittel $0^{0},059$, eine Grösse, welcher gegenüber die durch mangelhafte Barometerbestimmung verursachten Fehler kaum in Betracht kommen, da 1^{mm} Zunahme des Luftdruckes einen Unterschied von $0^{0},038$ C. in der Siedepunktshöhe bedingt.

Auch Marcet's Beobachtungen schwanken innerhalb solcher Grössen, wie ich sie bei feinen Thermometern nie wahrgenommen habe. Vor Allem muss daran erinnert werden, dass wenn sich im engen Ausströmungsrohre des Dampfes Wasser ansammeln kann, (besonders wenn zu viel Wasser ins Gefäss gegossen worden), ein Schwanken des Quecksilberstan-

---

1) Pogg. Ann. Bd. 124, pag. 295. Ann. de chim. et de phys. 1865. T. VI, pag. 104. 111.

2) Pogg. Ann. Bd. 61, pag. 252.

3) Pogg. Ann. Bd 13. pag. 40. Egen berechnet, wie mir scheint, eine zu grosse Abweichung. Er reducirt die beobachteten Siedepunkte auf einen unveränderlichen Nullpunkt. Ich werde später einen Versuch beschreiben zum Beweise, dass die Depressionen des Nullpunktes nicht die Lage des Siedepunktes beeinflussen. Von den zahlreichen und schönen Versuchen Egen's habe ich einige ohne Rücksicht auf Nullpunktsveränderungen berechnet, und finde weit geringere Abweichungen. Schon der Umstand, dass alle vier gleichzeitig untersuchte Thermometer in demselben Sinne abweichen, weist, nicht wie Egen meint, auf gleichartige Veränderungen Aller, sondern auf ein und denselben Fehler in der Reduktion aller Beobachtungen hin. Auch Recknagel hat seine in neuester Zeit mitgetheilten Versuche (Pogg. Ann. Bd. 123 pag. 136 Anh.) über Schwankungen des Siedepunktes ähnlich wie Egen behandelt, und, wie ich meine, eine zu grosse Unregelmässigkeit als Resultat erhalten Nach Recknagels Berechnung beträgt die Abweichung vom Mittel im Maximum 0,06, nach der meinigen nur 0,04 Grad. Leider ist in der Abhandlung nicht angegeben, wie gross die Beobachtungsfehler bei der Bestimmung des Siedepunktes sein konnten. Nach Anm. 2) Seite 128 wurde nur 0,03 Grad geschätzt. Demnach würden die vorliegenden Versuche gar keine Schwankung beweisen können.

des wird eintreten müssen, weil der Druck im Innern des Gefässes alsdann veränderlich ist. Einen constanten Stand erhält man nur dann, wenn der Dampf frei ausströmen kann.

Eine eigenthümliche Erscheinung hatte ich wahrzunehmen geglaubt, über welche ich einiges mittheilen will, wenn auch die Versuche bisher noch zu keinem sicheren Resultat mich geführt haben.

Wenn das Thermometer geraume Zeit nach Beginn des Siedens einen constanten Stand erreicht zu haben schien, und die Ausströmungsöffnung auf kurze Zeit verschlossen wurde, so musste durch den im Inneren gesteigerten Druck die Temperatur zunehmen. Nachdem nach Verlauf einer Minute der Verschluss aufgehoben war, und der Dampf frei ausströmen konnte, sank das Thermometer, erreichte aber nicht ganz den zuvor beobachteten Stand, sondern zeigte eine Zunahme von etwa 0,01 Grad. — Es lag nahe zu vermuthen, dass, ähnlich wie bei den erwähnten Versuchen von Magnus, die Beschaffenheit der Thermometerkugel, jenachdem dieselbe trocken oder benässt war, die Differenz verursachte, oder es lag der Grund bloss in einer höheren Temperatur der hervorragenden Quecksilbersäule.

Zu entschiedener Antwort bin ich desshalb nicht gelangt, weil dasjenige Thermometer, welches am auffallendsten die Unterschiede zeigte, in einen unbrauchbaren Zustand gerieth. Bei einem anderen wurde die Differenz fast auf Null gebracht durch längeres Zuwarten. Das letzte Steigen des Thermometers geht in der That sehr langsam vor sich; eine viertel Stunde dürfte kaum genügen, um sicher den Maximalstand zu erreichen, sobald ein beträchtlicher Theil der Quecksilbersäule hervorragt. Zum Beleg für die oben ausgesprochene Thatsache diene folgende Versuchsreihe, die mit dem zuerst erwähnten Thermometer angestellt wurde:

	Zeit	Siedepunkt
29. Nov.	$1^h\ 24'$	98.868
Bar. ($12^h\ 30'$)	$1^h\ 25'$	98.870
$= 755^{mm},4$	$1^h\ 26'$	98.872
	$1^h\ 29'$	98.872
	$1^h\ 32'$	98.872
	$1^h\ 36'$	98.872
Nach Erhitzung bis 99.38 und Wiedererkaltung		
	$1^h\ 38'$	98.880
	$1^h\ 41'$	98.880
	$1^h\ 45'$	98.880
	$1^h\ 49'$	98.880
Nach Abkühlung bis 98.4		
	$1^h\ 50'$	98.874
	$1^h\ 52'$	98.876
	$1^h\ 55'$	98.876
	$1^h\ 58'$	98.876
Nach Erhitzung bis 99.4		
Bar. ($2^h\ 0'$)	$2^h\ 0'$	98.880
$= 755^{mm},3$	$2^h\ 6'$	98.880

Weitere Versuche konnte ich mit diesem Thermometer nicht anstellen, weil es durch ein Versehen verdorben war.

Durch eine neue Versuchsreihe mit einem anderen Thermometer sollte die Frage entschieden und vor der ersten Erhitzung längere Zeit hindurch der Stand beobachtet werden.

Das Thermometer war ganz gleich dem vorigen, und ebenfalls in fünfzigstel Grade getheilt. Durch ein feststehendes Mikroskop liessen sich leicht 0,002 Grad schätzen. — Herr stud. math. Mielberg übernahm die Beobachtung:

Zeit	Therm.
5h 1′	98.726
5h 5′	98.728
5h 8′	98.728
5h 15′	98.728
5h 15′	99.728
5h 18′	98.730
5h 21′	98.730
5h 27′	98.732
5h 30′	98.734
5h 34′	98.736
5h 42′	98.736
5h 48′	98.736
5h 52′	98.736
5h 57′	98.738
6h 0′	98.738

Nach Erhitzung bis 99.6 (während 45 Sekunden)

6h 3′	98.738
6h 8′	98.738 (98.740?)

Die Erhitzung hatte bei diesem Thermometer gar keine Veränderung verursacht. Im Lauf von 2 Minuten war der frühere Stand wieder erreicht. Für jetzt muss ich es dahin gestellt sein lassen, was die Ursache der bei dem ersten Thermometer beobachteten eigenthümlichen Differenzen war. Die erste Beobachtung 5h 1′ in vorstehender Versuchsreihe geschah etwa 20 Minuten nach Beginn des Siedens. Die ziemlich rasch erfolgende Zunahme von 5 bis 6 Uhr war aber keinesweges bloss Folge einer Temperaturerhöhung der Quecksilbersäule. Denn mein meteorologisches Tagebuch zeigte an demselben fast windstillen Tage

	Bar. (0°)
29. Nov. 7 Uhr M.	757.3
11 Uhr 30′	758.3
2 Uhr 30′	759.2
11 Uhr Ab.	762.3
30. Nov. 7 Uhr M.	764.3

Daraus berechnet sich die Zunahme des Luftdruckes von 5 bis 6 Uhr = 0,36; dem entspricht eine Zunahme der Siedetemperatur von 0°.0136; d. h. fast genau soviel, als oben die Beobachtung ergab. Das allmählige Steigen war also lediglich Folge des vermehrten Luftdruckes, und es mag die vorstehende Reihe als Beleg für den leicht bemerkbaren Einfluss des letzteren, besonders aber für die Constanz der Beobachtungen gelten [1]). Man vergleiche hiermit folgende Versuchsreihe von Marcet [2]) und man wird erkennen, dass die Temperatur des Dampfes nicht auf die des siedenden Wassers bezogen werden darf:

---

1) Eine Zeitperiode steigenden Barometerstandes wäre demnach weniger geeignet für eine sehr genaue Siedepunktsbestimmung.

2) Zwar habe ich selbst nicht längere Versuchsreihen zu verschiedenen Zeiten und bei verschiedenem Luftdrucke angestellt; aber auch Egen's Versuche beweisen eine grössere Beständigkeit des Siedepunktes, wenn man nur die Depressionen nicht, wie dort geschieht, allen Beobachtungen als Constante hinzufügt, sondern sie vielmehr ganz unberücksichtigt lässt. Die im Text folgenden Beobachtungen von Marcet sind aber, wenn ich die Originalabhandlung nicht missverstehe, unmittelbar hinter einander abgelesen.

Temperatur des im Metallgefäss siedenden Wass.	Temperatur des Dampfes
100	99.84
100	99.85
100	99.88
100	99.81
100	99.86
100	99.84
100	99.87
100	99.85
100	99.78
100	99.82
Mittel 100	99.84

Im siedenden Wasser konnte ich keinen festen Stand beobachten. Es waren stets Schwankungen von etwa $0^{o},04$ zu bemerken. Solche Differenzen aber, wie in vorstehender Reihe (99.78 und 99.87) sind mir niemals vorgekommen, wenn mit gehöriger Sorgfalt experimentirt wurde. — Vor allen Dingen achte man darauf, dass sich das Wasser in der Ausflussröhre des Dampfes nicht ansammeln könne. Allerdings stieg die Temperatur stets merklich, wenn das Thermometer bedeutend der Wasseroberfläche genähert wurde;

die Kugel im Wasser	99.050 bis 99.090	nach Reduction auf gleichen Barom.
die Kugel 20 mm über dem Wasser	99°.800	
die Kugel 53 mm über dem Wasser	98.794	
die Kugel 80 mm über dem Wasser	98.785	
die Kugel 100 mm über dem Wasser	98.770	

Bei der ersten Beobachtung war ein sicheres Ablesen nicht möglich.

5. Endlich muss ich noch erwähnen, dass der Siedepunkt bis auf $^{1}/_{1000}$ Grad genau derselbe blieb. nachdem die Thermometerkugel plötzlich in schmelzenden Schnee gesenkt, und ebenso schnell wieder zurück in den Dampf gebracht war.

Dieser Versuch bestätigt die oben erwähnte Ansicht Muncke's, der zufolge eine beim Gefrierpunkt beobachtete Depression auf den Siedepunkt ohne Einfluss ist. Wenn also auch die Depressionen, wie früher dargethan war (Seite 63), nicht proportional der Temperaturzunahme abnehmen, sondern sprungweise, und bei verschiedenen Thermometern in ungleicher Art, so wird man doch am meisten der Wahrheit sich nähern, wenn man die Munckesche Annahme der Reduction einer Beobachtung zu Grunde legt.

Um eine möglichst dem Dampfe gleichkommende Temperatur aller Gefässwände zu erreichen, bedient man sich am besten solcher Apparate, die aus einer unten nahe über der Wasserfläche befindlichen Oeffnung den Dampf ausströmen lassen. Der letztere steigt in einem Cylinder bis an den Gefässdeckel auf, und innerhalb eines zweiten den ersten mantelartig umgebenden Cylinders hinab. In dem letzteren befindet sich die Ausströmungsöffnung, die nicht zu eng sein darf. Abbildungen findet man in den meisten Lehrbüchern der Physik [1]).

---

1) Wüllner „Lehrb. der Experim.-Phys." 1863. Bd. II pag. 12. Fig. 4; Mousson „die Physik auf Grundlage der Erfahrung". Bd. I Fig. 254.

III. Correktion der Thermometer wegen der Ausdehnung des Glases.

1. Nach allen bisher angeführten Correktionen bleibt noch eine anzubringen übrig, welche genau auszuwerthen, nach dem jetzigen Standpunkt der Frage, kaum möglich ist.

Wir hatten die Thermometerröhre bei einer constanten Temperatur kalibrirt. Im Versuche ist das Volumen aber veränderlich und von der jedesmaligen Temperatur selbst abhängig. Ausserdem bestimmen wir die Ausdehnung des Quecksilbers in einem sich mit Steigerung der Temperatur erweiternden Gefässe.

Die theoretische Entwickelung der hiedurch bedingten Correktion hat Rudberg [1]) gegeben; dieselbe ist in den neueren Lehrbüchern der Physik auch aufgenommen. Doch will ich dieselbe in etwas geänderter, möglichst einfacher Form hier wiedergeben, und für Temperaturen zwischen 0 und 100° zu bestimmen suchen.

Es sei bei 0° das Volumen der Thermometerkugel und Röhre bis zum Gefrierpunkt $= U$

ferner bei 0° das Volumen der Thermometerröhre vom Gefrierpunkte bis zum Siedepunkt $= R_0$

Der mittlere Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers bei der Temperatur t $= \triangle_t$

der mittlere cubische Ausdehnungscoefficient des Glases bei der Temperatur t $= \gamma_t$

seien demnach die Ausdehnungscoefficienten für Quecksilber und Glas bei 100° resp. $= \triangle_{100}$ und γ_{100}

so ist bei 0° das wahre Volumen des Quecksilbers $= U$

bei t° „ „ „ $= U\ (1 + t \triangle_t$

bei 100° „ „ „ $= U\ (1 + 100\ \triangle_{100})$

ferner ist bei 0° das wahre Volumen des Glases $= U$

bei t° das wahre Volumen des Glases bis zum Nullpunkt $= U\ (1 + t\gamma_t)$

bei t° das wahre Volumen der Röhre, wenn das Quecksilber bis zum Skalenpunkte x reicht $= \frac{x}{100} . R_0\ (1 + t . \gamma_t)$

bei 100° das wahre Volumen des Glases bis zum Nullpunkt $= U\ (1 + 100\ \gamma_{100})$

bei 100° das wahre Volumen der Röhre vom Null- bis zum Siedepunkte $= R_0\ (1 + 100\ \gamma_{100})$

Demnach ist des Volumen Quecksilber bei 100°: $U\ (1 + 100\ \triangle_{100}) = U\ (1 + 100\ \gamma_{100}) + R_0\ (1 + 100\ \gamma_{100})$

ebendassselbe bei t°: $U\ (1 + t\ \triangle_t) = U\ (1 + t . \gamma_t) + \frac{x R_0}{100}\ (1 + t . \gamma_t)$

folglich ist das Quecksilbervolumen, welches über den Nullpunkt getreten,

bei 100°: $U . 100\ (\triangle_{100} - \gamma_{100}) = R_0\ (1 + 100\ \gamma_{100})$

bei t_0: $U . t\ (\triangle_t - \gamma_t) = \frac{x}{100} . R_0\ (1 + t . \gamma_t)$

Für den Skalenpunkt x, der bei der Temperatur t abgelesen wird, erhalten wir demnach

$$x = t . \frac{\triangle_t - \gamma_t}{\triangle_{100} - \gamma_{100}} . \frac{1 + 100 . \gamma_{100}}{1 + t . \gamma_t} = k . t \qquad (a)$$

Auch wenn $\triangle_t$ und γ_t nicht mit der Temperatur veränderlich wären, so müsste das Thermometer doch eine Correktion erfahren, da die wahre Temperatur

---

1) Pogg Ann. Bd. 4I pag. 279. Anm. Die Entwickelung von Poggendorff in Bd. 41 pag. 472. Sieh auch Wüllner, l c. Bd. II pag. 21 und ff.

$t = \frac{1 + t\gamma_t}{1 + 100\,\gamma_{100}} . x$, wofür angenähert genommen werden darf $t = \frac{1 + x . \gamma_x}{1 + 100\,\gamma_{100}} . x$ (b)

Dieselbe Correktion für den Skalenwerth x erhalten wir, wenn $\triangle_t$ und γ_t zwar von der absoluten Temperatur abhängig sind, aber angenähert in demselben Maasse proportional mit derselben wachsen. Dann ist

$$\triangle_t = m + nt$$
$$\gamma_t = l + n't, \text{ und wenn } n = n',$$
$$\triangle_t - \gamma_t = m - l = \text{const.}$$
$$\text{also } \frac{\triangle_t - \gamma_t}{\triangle_{100} - \gamma_{100}} = 1.$$

Dass $n = n' = 0$ findet in der That niemals statt; der Ausdehnungscoefficient sowohl des Quecksilbers, als der des Glases wächst mit der Temperatur.

Nun verhalten sich alle Glassorten verschieden, sowohl was die Grösse l als die andere, n' betrifft. Eine Gleichheit von n und n' dürfte nur sehr selten Statt haben, so dass die Correktion der Gleichung b, statt a, angewandt werden könnte. —

2. Betrachten wir zunächst diesen Fall, so erhalten wir Correktionen, die auch zwischen 0 und 100° nicht vernachlässigt werden dürfen. — Die äussersten Werthe für den mittleren Ausdehnungscoefficienten des Glases für verschiedene Sorten sind nach Versuchen von Regnault[1])

$$\gamma_t = 0,000021 \text{ und } 0,000029$$

Die kleineren Werthe beziehen sich mehr auf Krystallglas; das weichere Glas hat höhere Werthe. Regnault fand selbst Unterschiede für dieselbe Sorte, jenachdem sie als Kugel oder als Röhre verarbeitet war[2])

Hiernach stellt sich die Correktion nach der Gleichung b folgendermassen heraus, für die beiden äussersten und einen Mittelwerth.

Werthe der Grössen, welche von den Ablesungen des Quecksilberthermometers zur Reduction auf die wahre Temperatur abgezogen werden müssen:

Temperatur	γ = 0,000020	γ = 0,000025	γ = 0,000030
0	0,000	0.000	0.000
10	0,018	0.022	0.027
20	0,032	0.039	0.048
30	0,042	0.051	0.063
40	0,049	0.060	0.072
50	0,051	0.062	0.075
30	0,049	0.060	0.072
70	0,042	0.051	0.063
80	0,033	0.039	0.048
90	0,019	0.022	0 027
100	0,000	0.000	0.000

Für den mittleren Werth von γ, beträgt die Verbesserung in der Mitte der Skale:

0°,06 zwischen 35° und 65°
0,05 „ 25° „ 35°, 65 und 75°
0,04 bei 30° „ 70°
0,02 „ 10° „ 90°
0 „ 0 „ 100°.

Will man die Correktion genauer, also nach der Gleichung a ermitteln, so müsste der Ausdehnungscoefficient für jedes individuelle Thermometer bestimmt werden. —

---

1) Ann. de ch. et de ph. s. III t. IV, p. 64. Pogg. Ann. Bd. 55 p. 584 und 587. Die obere Grenze = 0,000030 giebt Plücker (Pogg. Bd. 86. p. 264)

2) Ebendas. pag. 587 und Bd. 57, p. 216 Anm. 1.

3. Recknagel [1]) in München hat beim Vergleichen der Quecksilberthermometer mit dem Luftthermometer gefunden, dass jene um 0,2 Grad höher standen als dieses, ein Werth, den auch Regnault [2]) bei zahlreichen Versuchen mit verschiedenen Thermometern beobachtet hat. — Aus den mittleren Ausdehnungscoefficienten des Glases bei 100 und 200° leitete desshalb Recknagel in der angeführten Abhandlung Formeln für die Ausdehnung des Glases und des Quecksilbers her, welche vollkommen befriedigende Reductionen des Quecksilberthermometers gaben.

Da sowohl Recknagels als auch Regnaults Versuche mit Hülfe dieser Zahlen übereinstimmende Resultate geben, während Regnaults Tabelle über den Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers eine Abweichung von 0.17 Grad im entgegengesetzten Sinne ergäbe, so will ich die von 10 zu 10 Grad nothwendige Correktion hier auswerthen, da Recknagel die endgültige Verification nicht gegeben. Die ganze Rechnung ist in der nachfolgenden Tabelle ausgeführt. Die Columnen b und c sind die aus jener Abhandlung entnommenen Werthe der Ausdehnungscoefficienten. Der des Glases stimmt dem absoluten Werthe nach mit dem der meisten gangbaren Glassorten überein; Die Ausdehnung des Quecksilbers weicht wesentlich von der durch Regnaults Formel [3]) gegebenen ab. Die Bedeutung der übrigen Columnen ist ohne weiteres verständlich.

a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.	h.	i
Wahre Temperat. $= t$	Mittlerer Ausdehnungs-Coefficient des Glases $= \gamma_t$	Mittlerer Ausdehnungs-Coefficient des Quecksilb. $= \triangle_t$	Mittlerer scheinbarer Ausdehnungs-coefficient $= b. - c$	Logar v. d. $= -4 +$	Logar von $1 + t \cdot \gamma_t$	$\log k = \text{Log. } d. - \log. d._{100} - \log.(1+t.\gamma t) + \log(1+100.\gamma_t$	$\log k + \log. t. = \log x$	Skalenp. x_t bei der wahren Temp. t.
10	0.00002554	0,00018038	0,00015484	0,18988	0,000111	0,00368	1,00368	**10.085**
20	0.00002577	0,00018047	0,00015470	0,18949	0,000224	0,00318	1,30421	**20.147**
30	0,00002600	0,00018057	0,00015457	0,18912	0,000339	0,00269	1,47981	**30.186**
40	0,00002623	0,50018068	0,00015445	0,18879	0,000455	0,00224	1,60430	**40.207**
50	0,00002646	0,00018079	0,00015433	0,18845	0,000574	0,00179	1,70076	**50.207**
60	0,00002669	0,00018091	0,00015422	0,18814	0,000695	0,00136	1,77951	**60.189**
70	0,00002692	0,00018104	0,00015412	0,18786	0,000817	0,00095	1,84605	**70.154**
80	0,00002715	0,00018119	0,00015404	0,18763	0,000942	0,00060	1,90369	**80.111**
90	0,00002738	0,00018135	0,00015397	0,18744	0,001069	0,00028	1,95452	**90.058**
100	0,00002761	0,00018153	0,00015392	0,18729	0,001197	0,00000	2,00000	**100.000**

Die Columne i giebt den zu verbessernden Skalenwerth. Man begeht nur einen unmerklichen Fehler, wenn man die Differenzen der wahren Temperatur und der abgelesenen Skalenpunkte als Verbesserungen der in Col. a verzeichneten Hauptpunkte annimmt. Demnach wäre, wenn wir die $^1/_{1000}$ Grade vernachlässigen

bei dem Skalenpunkt	die Verbesserung
0	0
10	— 0,08
20	— 0,15
30	— 0,19
40	— 0,21
50	— 0,21
60	— 0,19
70	— 0,15
80	— 0,11
90	— 0,06
100	0

1) Thermometrische Versuche. Habilitationsschrift. München. 1864. Ein Auszug in Pogg. Ann. Bd. 124 p. 115.

2) Pogg. Ann. Bd. 57 p. 212.

3) Regnault nahm $\triangle_t = 0,00017905 + 0,0000000252$ t. Nach Recknagel kommt ein quadratisches Glied hinzu, und das constante Glied der Formel ist grösser. S. Regnault Mém. de l'Acad. roy. des sciences de l'Institut de France. T. XXI pag, 326.

Bis 200 Grad hinauf gelang es Recknagel durch Anwendung dieser Correktionen eine Uebereinstimmung in die Angaben des Quecksilber- und Lufthermometers zu bringen. Aber höher hinauf beträgt die Differenz mehre Grade. Die Formel für den Werth von γ_t kann übrigens auch nur zwischen den erwähnten Temperaturgränzen gelten.

Regnault[1]) hält den Fehler von $0^0,2$ in der Mitte der Skale für einen geringen, da, wie er meint, dieselbe Unsicherheit schon durch Depressionen des Nullpunktes erhalten wird. In der That haben wir gesehen, dass beträchtlich grösser die Abweichungen sein können, doch aber nur bei rücksichtloser Behandlung des Apparates.

4. Bei all den Mängeln, die das Quecksilberthermometer darbietet, wird dieses wichtige Instrument sich doch kaum jemals durch ein anderes ersetzen lassen. In Temperaturen über 100 Grad hinaus scheint ein Vergleich jedes einzelnen Thermometers mit dem Lufthermometer nothwendig[2]), — da die durch die Ausdehnung des Glases bedingte Correktion mehre Grade erreicht, und die aus verschiedenen Sorten fabricirten Thermometer nicht unter einander übereinstimmen. Zwischen 0 und 100 Grad dürfte aber das Quecksilberthermometer um so viel mehr Zutrauen verdienen, als dasselbe umsichtiger behandelt wird. Bei planlosem Gebrauch desselben kann in der Mitte der Skale kaum ein voller Grad, trotz einer sorgfältigen Kalibrirung, verbürgt werden. —

Die zuletzt entwickelten Correktionsgrössen beziehen sich, streng genommen, nur auf solche Thermometer, deren Theilung auf die Röhre selbst aufgeätzt ist. Denn die beobachtete Länge x eines Stückes der Röhre muss alsdann wirklich mit dem linearen Ausdehnungscoefficienten des Glases multiplicirt werden, wenn das entsprechende Volumen Quecksilber zu bestimmen ist. Ebenso dürften diejenigen Thermometer, deren Röhren, mit einer Glasskale verbunden, in einen Glasmantel eingefasst sind, behandelt werden, auch in dem Falle, wo die Skale nur an ihrem oberen Ende von einer Fassung festgehalten wird, denn bei jeder Temperatur wären die linearen Ausdehnungen aller drei Körper kaum verschieden von einander, so dass auch bei der Siedhitze etwa, ein eingeätzter Nullpunkt der Röhre mit dem der Skale zusammenfallen müsste. Anders bei Messing- oder Metallskalen, deren linearer Ausdehnungscoefficient beträchtlich von dem der Röhre abweicht. Beispielsweise ist

	der lin. A. C.
für Messing	0,00001878
Krystallglas (Röhre)	0,00000701
schwed. Glas (Kugel)	0,00000814
weisses Glas (Röhre)	0,00000882

Die lineare Ausdehnung ist beim Metall, wie man sieht, etwas mehr als doppelt so gross. Bei jedem einzelnen Thermometer wird berücksichtigt werden müssen, welche Orte der Röhre und der Skale bei allen Temperaturen zusammenfallen. Von diesem Punkte aus muss die Differenz der linearen Ausdehnungscoefficienten in Rechnung gebracht werden. — Von allen Metallen würde sich das Platin am besten zum Gebrauch für Thermometerskalen eignen, da bekanntlich der Ausdehnungscoefficient desselben fast ganz gleich dem des Glases ist, nämlich = 0,000008565 (Borda); 0,000008841 (Dalong und Petit). — Wenn Theile der Quecksilbersäule von verschiedener Länge anderen als den zu beobachtenden Temperaturen ausgesetzt sind, wie z. B. in den zuletzt mitgetheilten Versuchen,so dürfte eine sichere Reduction kaum möglich sein. Weder die Temperatur der Glasröhre, noch die des Quecksilbers im hervorragenden Theile, ist genau zu ermitteln.

Vorliegende Andeutungen mögen hier genügen, um wiederum daran zu erinnern, dass das Quecksilberthermometer ein schwierig zu behandelndes Instrument ist. Aufgabe der Wis-

---

1) s. Regnault Ann. de chim. et de phys. 1842. T. V pag. 98.

2) Ebendas. pag. 103 und Mém. de l'Acad. roy. d. sc. 1847. T. XXI. p. 191.

senschaft ist es, unbekümmert um andere Mängel, jede einzelne Unsicherheit möglichst fortzuschaffen. In diesem Sinne müssen vor Allem die Kaliberfehler vermieden werden, und dazu hauptsächlich sollte die vorliegende Abhandlung einen Beitrag liefern. Bei thermometrischen Versuchen handelt es sich oft um Beantwortung der schwierigsten und wichtigsten Fragen der Physik. Ein sorgfältiges Studium der Apparate wird daher jeder exacten Arbeit voraufgehen. Die bei einem Thermometer anzubringenden Verbesserungen, so weit sie von physischen Umständen abhängen, können aber selbst nicht eher ermittelt werden, als bis das Kaliber der Röhre sorgfältig untersucht worden.

Thesen.

1. Eine Unbeständigkeit in den Angaben des Quecksilberthermometers bei 100° C. ist bisher nicht erwiesen.
2. Es ist wahrscheinlich, dass alle Körper einen Siedepunkt unter ihrem Gefrierpunkte haben.
3. Das mechanische Aequivalent des Lichtes ist nicht bestimmbar.
4. „Licht“ ist kein physikalischer Begriff.
5. Die Hypothese einer glühenden Photosphäre um einen dunklen Sonnenkörper entspricht nicht mehr dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft.
6. Weder die Schwingungszahlen zweier Töne, noch ihre logarithmische Differenz ist maassgebend für die Auffassung eines Intervalles.
7. Die Combinationstöne sind nicht entscheidend für den Wohlklang eines Intervalles.
8. Die Dreiklänge auf der zweiten Stufe im Dur-System, und auf der siebenten Stufe im Moll-System sind dissonant.
9. Ein Viereck in einer Ebene umschliesst keinen Flächenraum.
10. Für den Vergleich gleichzeitiger meteorologischer Beobachtungen ist die Reduction der Barometerstände auf Meereshöhe nicht statthaft.

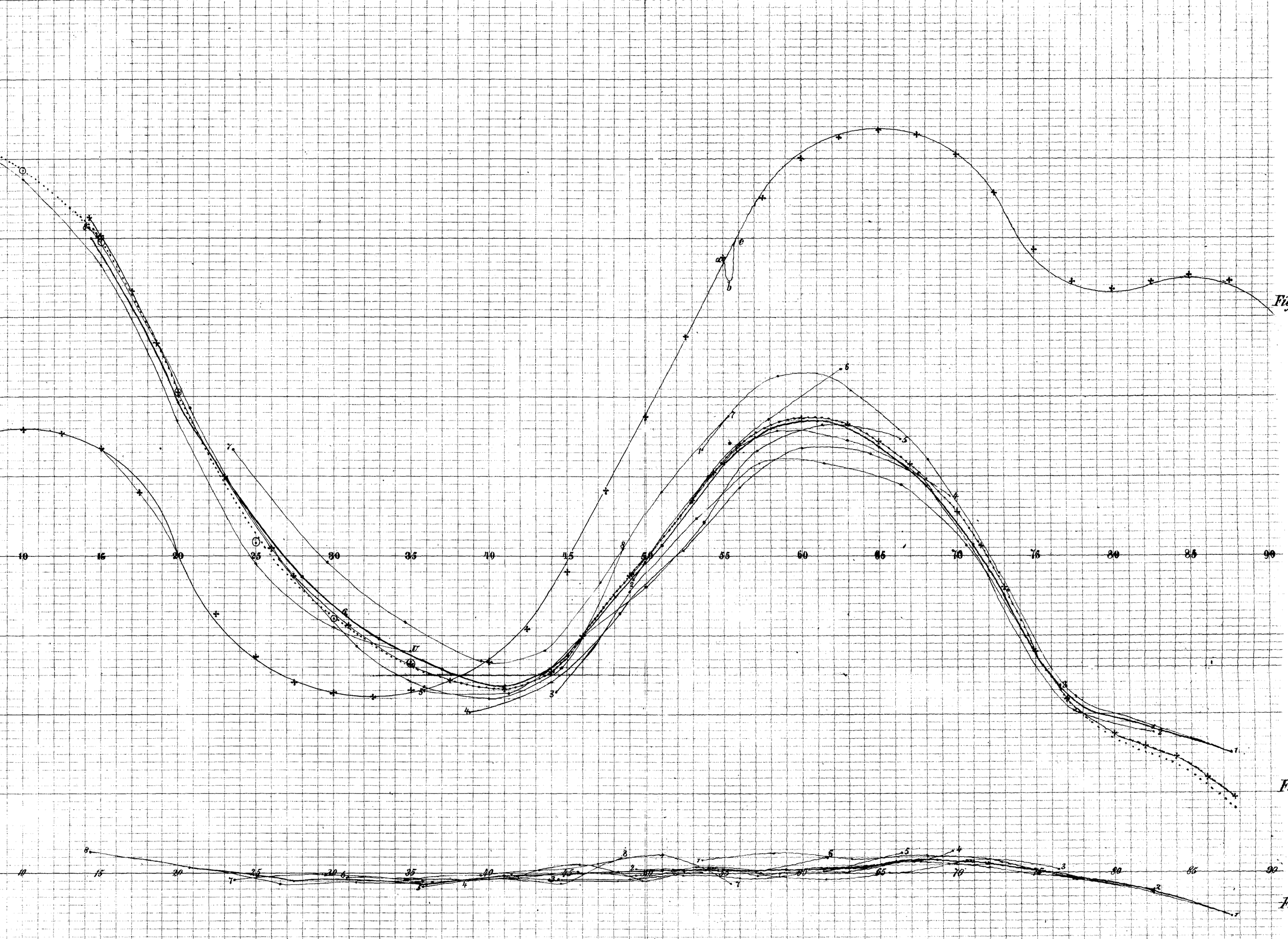


Fig.1.

Fig.2

Fig.3.

260
199

Ueb. +228
Ueb. +224

Fig 6

Fig.1.

Uebertragung der Curve Fig.2

Fig.5.

Fig.2.

Fig.7

Fig.3

Fig.4.

Fig.3.

Fig.6.

Fig.5.

Fig 4

Fig.1

Differ. der Ordinaten.

Fig.2.

Fig.3.

Fig. 4

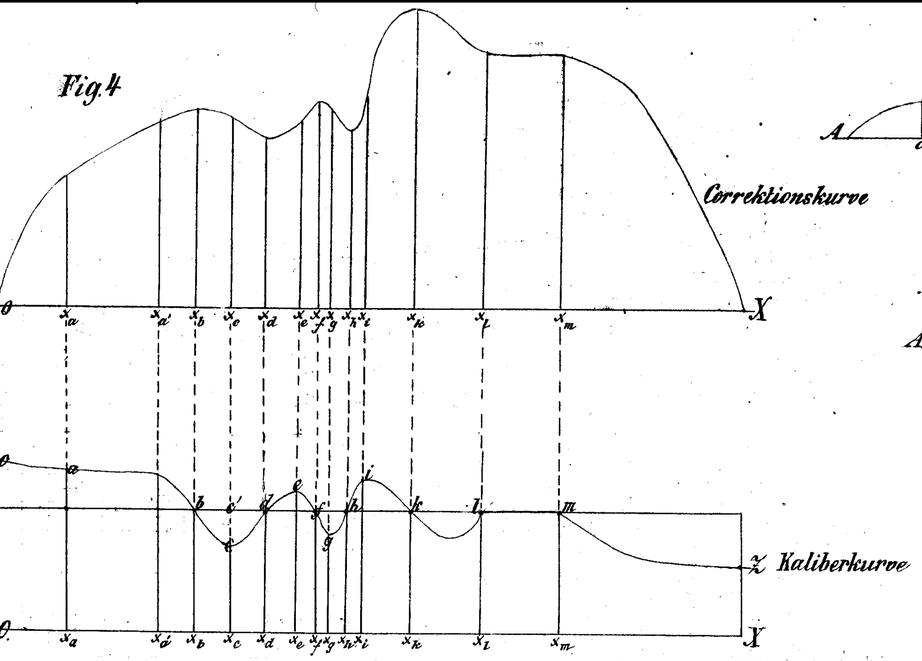


Fig. 1

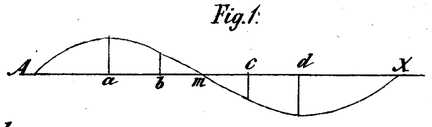


Fig. 1a

Fig. 1 b.

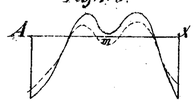


Fig. 2

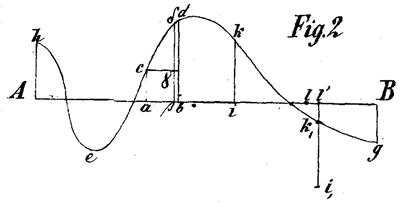


Fig. 3.

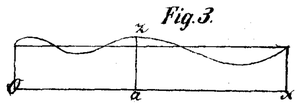


Fig. 5.

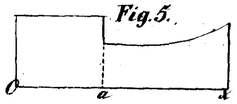
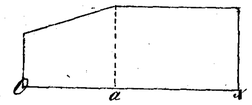


Fig. 6.



Graphische Darstellung der zweiten Verbesserung.

Correctionstafel

für das Geissler'sche Normaleudiometer.